文章编号: 1008-1542(2006)02-0119-03

多面体不确定线性系统的鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定研究

仇计清, 张金会, 高志峰, 杨洪玖

(河北科技大学 理学院, 河北 石家庄　050018)

摘　要: 针对一类多面体不确定线性系统给出一种新的鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定的充分条件, 该条件可以由一族线性矩阵不等式(LMIs)的可行解得到, 而这族 LMIs可以由多面体的顶点描述。通过引入参数相关 Lyapunov函数使得该条件的保守性降低, 与其他条件相比这一个条件具有更广泛的适用性, 推广并改进了现有成果。

关键词: 鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定; 线性矩阵不等式(LMIs); 参数相关 Lyapunov函数; 多面体不确定

中图分类号: O231　　文献标识码: A

Study on robust $\mathscr{D}$-stability of polytopic uncertain systems

QIU Ji-qing, ZHANG Jin-hui, GAO Zhi-feng, YANG Hong-jiu

(College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract In this paper, a new sufficient LMIs condition for the robust $\mathscr{D}$-stability is established with respect to polytopic uncertain systems. The robust stability of the uncertain systems can be verified by means of the feasibility of a set of LMIs described only in terms of the vertices of the polytopic domain. This approach is less conservative than quadratic stability by using a parameter-dependent Lyapunov function, and extends the results of the related references.

Key words robust $\mathscr{D}$-stability; linear matrix inequality(LMIs); parameter-dependent Lyapunov function; polytopic uncertainty

目前, 有关参数不确定系统的鲁棒稳定性的研究已成为控制界和数学界的一个热门课题。研究的方法主要有基于 Kharitonov定理[1]的代数方法, μ/K_m 理论[2]和 Lyapunov稳定性理论。其中 Lyapunov稳定性理论的作用尤为突出, 它的核心内容是构造 Lyapunov函数。最初的成果都是基于二次稳定[3~5], 但是这种方法具有很大的保守性, 其主要原因是对整个不确定系统矩阵集仅使用一个单项的 Lyapunov函数。为了减少这种保守性, 人们提出了一种所谓的参数相关 Lyapunov函数[6,7], 基于这一方法, 文献[8]和[9]给出了多面体不确定系统的鲁棒稳定性的一个充分条件, 文献[10]将这一充分条件推广成为鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定的充分条件。文献[8]—文献[10]的主要思想是添加新的矩阵变量并且扩大 LMIs的维数。而文献[11]和文献[12]则使用了一种扩展的 LMIs集, 得到了一个更好的稳定性条件。这 2种方法都包含了二次 $\mathscr{D}$-稳定。笔者结合文献[10,11,13]的主要思想, 将文献[13]的结论推广成为更一般的形式, 得到令人满意的结果。

1　系统描述与 $\mathscr{D}$-稳定条件

定义 1　复平面 C 上的基于 LMI的凸域类可由

$$\mathscr{D}_L = \{z \mid \boldsymbol{R}_{11} + \boldsymbol{R}_{12}z + \boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}z^{*} < 0\}$$

收稿日期: 2005-05-30; 修回日期: 2006-02-27; 责任编辑: 张　军
基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(603384)
作者简介: 仇计清(1956-), 男, 河北井陉人, 教授, 博士, 主要从事鲁棒控制、模糊复分析、可拓数学等方面的研究。

刻画, 其中, $\boldsymbol{R}_{11}=\boldsymbol{R}_{11}^{\mathrm{T}}\in\mathscr{H}^{d\times d}$, $\boldsymbol{R}_{12}\in\mathscr{H}^{d\times d}$。

设 $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}&\boldsymbol{R}_{12}\\ \boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{R}_{22}\end{bmatrix}\in\mathscr{H}^{2d\times 2d}$ 是一个对称矩阵, 它的稳定域为

$$\mathscr{D}_R=\{z:\boldsymbol{R}_{11}+\boldsymbol{R}_{12}z+\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}z^{*}+\boldsymbol{R}_{22}zz^{*}<0\},$$

称之为扩展的 LMI域。

当 $\boldsymbol{R}_{22}>0$, 设 $r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{R}_{22})$ 时, 则 $\boldsymbol{R}_{22}$ 可以写成 $\boldsymbol{R}_{22}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$, 这里 $\boldsymbol{L}\in\mathscr{H}^{d\times r}$ 是 $\boldsymbol{R}_{22}$ 的平方根, 此时 $\mathscr{D}_R$ 可由如下形式的 LMI域刻画:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}+\boldsymbol{R}_{12}z+\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}z^{*}&\boldsymbol{L}z\\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}z^{*}&-\boldsymbol{I}_r\end{bmatrix}<0.$$

本文所考虑的稳定区域 $\mathscr{D}=\mathscr{D}_R$, 并且总假设 $\boldsymbol{R}_{22}\geqslant 0$。

设线性不确定动力系统模型为

$$\delta[x(t)]=\boldsymbol{A}(\lambda)x(t),\tag{1}$$

式中: δ为关于连续时间的微分或离散时间的差分算子; $\boldsymbol{A}(\lambda)\in\mathscr{H}^{n\times n}$ 为不确定矩阵, 且属于一个多面体不确定域 (它是该域中的一个凸多面体):

$$\mathscr{A}=\{\boldsymbol{A}(\lambda)\in\mathscr{H}^{n\times n}:\boldsymbol{A}(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{A}_i,\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,N,\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1\},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N$ 为 $A(\lambda)$ 的 N 个顶点。

定义 **2** 称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 $\mathscr{D}$-稳定的, 如果 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的所有特征值都属于区域 $\mathscr{D}$, 此时又称系统 (1) 是 $\mathscr{D}$-稳定的。

定义 **3** 称 $\mathscr{A}$ 是鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定的, 如果对于所有的 $\boldsymbol{A}(\lambda)\in\mathscr{A}$, $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的所有特征值都属于区域 $\mathscr{D}$, 此时, 又称系统 (1) 是鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定的。

定义 **4** 称 $\mathscr{A}$ 是二次 $\mathscr{D}$-稳定的, 如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 对于所有的 $\boldsymbol{A}(\lambda)\in\mathscr{A}$ 均满足 $\boldsymbol{R}_{11}\leftarrow\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}_{12}\leftarrow(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})+\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})+\boldsymbol{R}_{22}\leftarrow(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})<0$。

引理 **1** 系统 (1) 是鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定的, 当且仅当存在一个参数相关的 Lyapunov矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 和矩阵 $\boldsymbol{G}(\lambda)$ 满足

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}\leftarrow\boldsymbol{P}(\lambda)+\boldsymbol{R}_{12}\leftarrow(\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda))+\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\lambda)\boldsymbol{P}(\lambda))&\boldsymbol{L}\leftarrow(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\lambda)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\lambda))\\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda))&\boldsymbol{I}_r\leftarrow(\boldsymbol{P}(\lambda)-\boldsymbol{G}(\lambda)-\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\lambda))\end{bmatrix}<0,$$

其中: $\boldsymbol{P}(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{P}_i$; $\boldsymbol{G}(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{G}_i$; $\lambda_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,N$, $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1$, $\boldsymbol{R}_{22}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$。

引理 **2** 如果存在对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}_i\in\mathscr{H}^{n\times n}$, $\boldsymbol{G}_i\in\mathscr{H}^{n\times n}$, $i=1,2,\cdots,N$, 满足

$$\boldsymbol{M}_i<\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{I}_r\leftarrow\boldsymbol{I}_n)&0\\ 0&0\end{bmatrix},\ i=1,2,\cdots,N,$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}<\frac{2}{N-1}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{I}_r\leftarrow\boldsymbol{I}_n)&0\\ 0&0\end{bmatrix},\ i=1,2,\cdots,N,\ j=i+1,\cdots,N,$$

则系统 (1) 是鲁棒 $\mathscr{D}$-稳定的。

$$\boldsymbol{M}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}\leftarrow\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{R}_{12}\leftarrow(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i)+\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i)&\boldsymbol{L}\leftarrow(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}})\\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{A}_i)&\boldsymbol{I}_r\leftarrow(\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{G}_i-\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}})\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_{ij}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}\leftarrow\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{R}_{12}\leftarrow(\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i)+\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j)&\boldsymbol{L}\leftarrow(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}})\\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{A}_i)&\boldsymbol{I}_r\leftarrow(\boldsymbol{P}_j-\boldsymbol{G}_j-\boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}})\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11}\leftarrow\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{R}_{12}\leftarrow(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_j)+\boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i)&\boldsymbol{L}\leftarrow(\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}})\\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\leftarrow(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{A}_j)&\boldsymbol{I}_r\leftarrow(\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{G}_i-\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}})\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_{22}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}。$$

2 主要结果

笔者通过在 LMIs的右边添加矩阵变量和 LMIs约束, 得到以下结果, 弥补了文献 [13] 的不足。

定 理　如果存在矩阵 $\boldsymbol{G}_i \in \mathscr{R}^{nd\times nd}$, $\boldsymbol{Y}_{ii} \in \mathscr{R}^{2nd\times 2nd}$, $i = 1, 2, \cdots, N$,

$$\boldsymbol{Y}_{ij} = \boldsymbol{Y}_{ji}^{\mathrm{T}} \in \mathscr{R}^{2nd\times 2nd},\ i = 1, 2, \cdots, N,\ j = i+1, \cdots, N,$$

满足 $\boldsymbol{M}_i \leqslant \boldsymbol{Y}_{ii}, \boldsymbol{M}_{ij} \leqslant \boldsymbol{Y}_{ij} + \boldsymbol{Y}_{ji}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{Y} = [\boldsymbol{Y}_{ij}] \leqslant 0$,那么系统 (1) 是鲁棒 $\mathscr{D}$稳定的。

证 明　$\forall \boldsymbol{A}(\lambda) \in \mathscr{A}$, $\boldsymbol{A}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{A}_i$, $\boldsymbol{G}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{G}_i$, $\boldsymbol{P}(\lambda) = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\boldsymbol{P}_i$, $\sum_{i=1}^{N}\lambda_i = 1$,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} \leftarrow \boldsymbol{P}(\lambda) + \boldsymbol{R}_{12} \leftarrow (\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)) + \boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\lambda)\boldsymbol{P}(\lambda)) & \boldsymbol{L} \leftarrow (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\lambda)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\lambda)) \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{G}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)) & \boldsymbol{I}_r \leftarrow (\boldsymbol{P}(\lambda) - \boldsymbol{G}(\lambda) - \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\lambda)) \end{bmatrix} =$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} \leftarrow \boldsymbol{P}_j + \boldsymbol{R}_{12} \leftarrow (\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i) + \boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j) & \boldsymbol{L} \leftarrow (\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{A}_i) & \boldsymbol{I}_r \leftarrow (\boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{G}_j - \boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix} +$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} \leftarrow \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{R}_{12} \leftarrow (\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_i) + \boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i) & \boldsymbol{L} \leftarrow (\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{A}_i) & \boldsymbol{I}_r \leftarrow (\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{G}_i - \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix} +$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\lambda_j\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} \leftarrow \boldsymbol{P}_j + \boldsymbol{R}_{12} \leftarrow (\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{A}_i) + \boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j) & \boldsymbol{L} \leftarrow (\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{G}_j\boldsymbol{A}_i) & \boldsymbol{I}_r \leftarrow (\boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{G}_j - \boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix} +\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{11} \leftarrow \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{R}_{12} \leftarrow (\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{A}_j) + \boldsymbol{R}_{12}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i) & \boldsymbol{L} \leftarrow (\boldsymbol{A}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}) \\ \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}} \leftarrow (\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{A}_j) & \boldsymbol{I}_r \leftarrow (\boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{G}_i - \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2\boldsymbol{M}_i + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\lambda_i\lambda_j\boldsymbol{M}_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2\boldsymbol{Y}_{ii} + \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\lambda_i\lambda_j(\boldsymbol{Y}_{ij} + \boldsymbol{Y}_{ji}^{\mathrm{T}}) = \lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\lambda \leqslant 0,$$

其中 $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_N]^{\mathrm{T}}$。

3 结　语

笔者给出了多面体不确定系统的一种新的、较好的鲁棒 $\mathscr{D}$稳定充分条件, 该条件同时保证系统的二次 $\mathscr{D}$稳定性。所得结果便于对系统的鲁棒 $\mathscr{D}$稳定性进行检验。

参考文献:

[1] BARMISH B R, KANG H I. A survey of extreme point results for robustness of control systems[J]. Automatica, 1993, 29: 13-35.

[2] 周克敏, DOYLE J C, GLOVER K. 鲁棒与最优控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.

[3] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory[M]. Philadelphia: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[4] CHILALI M, GAHINET P. $\mathscr{H}_\infty$ design with pole placement constraints: an LMI approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(3): 358-367.

[5] GEROMEL J C, PERES P L D, BERNUSSOU J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems[J]. SIAM Journal of Control Opt, 1991, 29: 381-402.

[6] FERON E, APKARIAN P, GAHINET P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(7): 1 041-1 046.

[7] GAHINET P, APKARIAN P, CHILALI M. Affine parameter-depedent Lyapunov functions and real parametric uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(3): 436-442.

[8] OLIVEIRA de M C, BERNUSSOU J, GEROMEL J C. A new discrete-time robust stability condition[J]. Systems and Control Letters, 1999, 37(4): 261-265.

[9] OLIVEIRA de M C, GEROMEL J C, HSU L. LMI characterization of structural and robust stability: the discrete-time case[J]. Linear Algebra and Applications, 1999, 296(1-3): 27-38.

[10] PEAUCELLE D, ARZELIER D, BACHELIER O, et al. A new robust $\mathscr{D}$-stability condition for real convex polytopic uncertainty[J]. Systems and Control Letters, 2000, 40(1): 21-30.

[11] RAMOS D C W, PERES P L D. A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems[J]. Systems and Control Letters, 2001, 43(5): 371-378.

[12] RAMOS D C W, PERES P L D. A LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(4): 675-678.

[13] LIU Y S, FANG C H, KAU S W, et al. An improved LMI-based $\mathscr{D}$-stability condition for polytopic uncertain systems[A]. IEEE 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design[C]. Taipai: Taiwan Press, 2004.