文章编号: 1008-1542(2006)02-0107-03

Lesile型时滞捕食系统的 Hopf分支

刘启明, 董士杰, 甘勤涛

(军械工程学院基础部, 河北石家庄　050003)

摘　要: 研究了自治的 Lesile型具有时滞的 2种群捕食系统正平衡点的稳定性, 得到了稳定性对时滞长度的限制程度, 讨论了该系统的 Hopf分支现象, 最后给出了一个例子进行验证。

关键词: 捕食系统; 时滞; Hopf分支

中图分类号: O175. 14　　文献标识码: A

Hopf bifurcation of Lesile type predator-prey system with time delay

LIU Qi-ming, DONG Shi-jie, GAN Qin-tao

(Department of Basic Courses, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang Hebei 050003, China)

Abstract: The local stability properties of Lesile type two species predator-prey system with time delay is researched. As stability will impose restrictions on the length of time delay, Hopf bifurcation of the system is investigated. Finally, a example supporting the theoretical analysis is is given.

Key words: predator-prey system; time delay; Hopf bifurcation

考虑时滞捕食者——食饵 2种群相互作用的生态模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[r_1 - a_{11}x_1(t)] - c(x_1)x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)\left[r_2 - \dfrac{a_{21}x_2(t-\tau)}{x_1(t-\tau)}\right], \end{cases} \tag{1}$$

式中: $x_1(t)$, $x_2(t)$分别表示食饵种群, 捕食者种群的密度; τ为食饵种群妊娠时间, 反映捕食者成年种群才有捕食能力, $a_{ij}(i, j = 1, 2)$, $r_i(i = 1, 2)$为正常数; $c(x_1)$为功能性反应函数, 满足 $c(0) = 0$, $c'(x_1) > 0$, 存在常数 k使得 $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} c(x_1) = k$。

显然捕食系统的 5类功能性反应函数 ax_1, $\dfrac{ax_1}{1+mx_1}$, $\dfrac{ax_1^n}{1+x_1^n}$, $\dfrac{ax_1^2}{(A+x_1)(B+x_1)}$, $1-e^{-ax_1}$均为 $c(x_1)$类型, 系统(1)首见于文献[1], 文献[2]得到的系统(1)是一致持续生存, 并指出系统正平衡点在时滞有一定长度限制下稳定。本文讨论了系统(1)正平衡点的 Hopf分支现象, 并得到正平衡点稳定的充分必要条件。

1　Hopf分支与开关现象

引　理　系统(1)存在唯一的正平衡点。

系统(1)正平衡点满足方程(2),

$$\begin{cases} r_1 - a_{11}v_1 - \dfrac{c(v_1)}{v_1}v_2 = 0, \\ r_2 - \dfrac{a_{21}v_2}{v_1} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期: 2004-08-30; 修回日期: 2005-12-12; 责任编辑: 张　军
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471066)

作者简介: 刘启明(1969-), 男, 河北沽源人, 副教授, 硕士, 主要从事微分方程及其应用方面的研究。

由方程(2)的第2个方程解出 $v_2=\frac{r_2 v_1}{a_{21}}$ 代入第1个方程得

$a_{21}r_1-a_{11}a_{21}v_1-c(v_1)r_2=0$, 记作 $f(v_1)=0$, 注意 $f(0)=a_{21}r_1>0$, $\lim_{v_1\to+\infty}f(v_1)=-\infty$, $f'(v_1)<0$, 所以 $f(v_1)=0$ 有且仅有1个正根 v_1^*, 从而 $v_2=\frac{r_2 v_1^*}{a_{21}}$。系统(1)存在唯一的正平衡点, 记作 $E(x_1^*, x_2^*)$。

定 理 系统(1)当且仅当 $b_{11}+b_{22}<0$, $b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}>0$ 当 $\tau<\tau_0$ 时, 正平衡点稳定; 当 $\tau>\tau_0$ 时, 正平衡点不稳定; 当 $\tau=\tau_0$ 时, 系统在正平衡点附近分支出周期解。其中: $b_{11}=r_1-2a_{11}x_1^*-c'(x_1^*)x_2^*$, $b_{12}=-c(x_1^*)$, $b_{21}=\frac{a_{21}x_2^{*2}}{x_1^{*2}}$, $b_{22}=-\frac{a_{21}x_2^*}{x_1^*}$。

证 明 系统(1)的正平衡点 $E(x_1^*, x_2^*)$ 对应的线性系统为

$$\begin{cases}\dot{y}_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2,\\ \dot{y}_2=b_{21}y_1(t-\tau)+b_{22}y_2(t-\tau).\end{cases}\tag{3}$$

系统(3)的特征方程为 $\begin{vmatrix}b_{11}-\lambda & b_{12}\\ b_{21}e^{-\lambda\tau} & b_{22}e^{-\lambda\tau}-\lambda\end{vmatrix}=0$, 即

$$\lambda^2-b_{11}\lambda+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}-b_{22}\lambda)e^{-\lambda\tau}=0,\tag{4}$$

考虑方程

$$\lambda^2-(b_{11}+b_{22})\lambda+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})=0\tag{5}$$

由 Routh-Hurwitz准则可以知道, 当且仅当 $b_{11}+b_{22}<0$, $b_{11}b_{12}-b_{12}b_{21}>0$ 时, 方程(5)的特征根具有负实部, 于是当 $\tau=0$ 时, 正平衡点 $E(x_1^*, x_2^*)$ 局部稳定。

令 $\lambda=i\omega$ 代入方程(4)有

$$-\omega^2-b_{11}\omega i+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}-b_{22}\omega i)(\cos\omega\tau-i\sin\omega\tau)=0$$

分离实部与虚部有

$$\begin{cases}-\omega^2+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\cos\omega\tau-b_{22}\omega\sin\omega\tau=0,\\ -b_{11}\omega-b_{22}\omega\cos\omega\tau-(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\sin\omega\tau=0,\end{cases}\tag{6}$$

消去三角函数得

$$\omega^4+(b_{11}^2-b_{22}^2)\omega^2-(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})^2=0,\tag{7}$$

则有

$$\omega_\pm^2=\frac{1}{2}[(b_{22}^2-b_{11}^2)\pm\sqrt{(b_{22}^2-b_{11}^2)^2+4(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})^2}],$$

故方程(7)必有1个正根 ω_0, 此时特征方程(4)有一对纯虚根 $\lambda=\pm i\omega_0$。由于方程(7)有且仅有1个正实根, 系统(1)无开关现象。

由方程(5)解出对应于 ω_0 的 τ_{0n} 为

$$\tau_{0n}=\frac{1}{\omega_0}\arcsin\left\{\frac{-b_{22}\omega_0^3-b_{11}\omega_0(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})}{b_{22}^2\omega_0^2+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})^2}\right\}+\frac{2n\pi}{\omega_0},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

$\tau=0$ 时, 当且仅当在定理条件 $b_{11}+b_{22}<0$, $b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}>0$ 下系统稳定, 由 Bulter引理[3]知道, 当 $\tau<\tau_0$, $\tau_0=\tau_{00}$ 时, 正平衡点 E 稳定。

方程(4)对 τ 求导, 得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}=\frac{b_{11}-2\lambda}{\lambda^2(\lambda-b_{11})}-\frac{b_{22}}{\lambda(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}-b_{22}\lambda)}-\frac{\tau}{\lambda},$$

$$\operatorname{sgn}\left\{\frac{d(\operatorname{Re}\lambda)}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\lambda=i\omega_0}=\operatorname{sgn}\left\{\operatorname{Re}\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\lambda=i\omega_0}=$$

$$\operatorname{sgn}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{b_{11}-2\lambda}{\lambda^2(\lambda-b_{11})}\right]\Big|_{\lambda=i\omega_0}-\operatorname{Re}\left[\frac{b_{22}}{\lambda(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}-b_{22}\lambda)}\right]\Big|_{\lambda=i\omega_0}\right\}=$$

$$\operatorname{sgn}\left\{\frac{b_{11}^2+2\omega_0^2}{\omega_0^2(b_{11}^2+\omega_0^2)}-\frac{b_{22}^2}{b_{22}^2\omega_0^2+(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})^2}\right\}=$$

$$\operatorname{sgn}\{(b_{11}^2+2\omega_0^2)(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})^2+b_{22}^2\omega_0^4\}.$$

故 $\frac{d(\operatorname{Re}\lambda)}{d\tau}\Big|_{\lambda=i\omega_0,\tau=\tau_0}>0$, Hopf分支在 $\omega=\omega_0$, $\tau=\tau_0$ 时发生。

2 例　子

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)\left[1 - x_1(t) - \dfrac{x_2(t)}{1+x_1(t)}\right], \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)\left[1 - \dfrac{x_2(t-\tau)}{x_1(t-\tau)}\right], \end{cases} \tag{8}$$

此时, $c(x_1) = \dfrac{ax_1}{1+mx_1}$系统 (1)为 Holling-Tanner型捕食系统。可以验证系统 (8)有唯一的正平衡点 ($\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$), 并且符合定理条件, 系统 (1)正平衡点当 $\tau < 1.568\,9$时稳定, 在 $\tau = 1.568\,9$附近分支出周期解。

参考文献:

[1] LESLIE P H, GOWER J C. The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species[J]. Biometrika, 1960, 47(1): 219-233.

[2] BERETTA E, KUANG Y. Global analysis in some delayed ratio-dependent predator-prey systems[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1998, 32(3): 381-408.

[3] FREEDMAN H I, RAO HAIR SREE V. The trade-off between mutual interference and time lags in predator-prey system[J]. Bull Math Biol, 1983, 45(12): 991.

(上接第 **106**页)

3.3 近优逼近的例题分析

下面在近优意义下来分析例 3和例 4。

在例 3中, 若采用 ε-近优最值方法, 不妨取近优度 $\varepsilon = 0.01$, 则当 $n \geqslant 100$时, $G(t)$和 $G_n(t)$的 ε-近优最小值点集合分别为 $G_{\min} = [0.99, 1.01]$和 $G_{\min}^{(n)} = [0.99, 1.01]$, 从而 $\sup G_{\min} = 1.01$, $\sup G_{\min} = \sup G_{\min}^{(n)} = 1.01$, $\sup G_{\min}^{(n)} - \sup G_{\min} = 0$, 显然 $\sup G_{\min}^{(n)} - \sup G_{\min} \to 0 (n \to \infty)$。

在例 4中, 若采用 ε-近优最值方法, 不妨取近优度 $\varepsilon = 0.01$, 则当 $n \geqslant 100$时, $G(t)$和 $G_n(t)$的 ε-近优最大值点集合分别为 $G_{\max} = [0.99, 3.01]$和 $G_{\max}^{(n)} = [0.99, 4 - 0.99n/(n-1)]$, 从而 $\sup G_{\max} = 3.01$, $\sup G_{\max}^{(n)} = 4 - 0.09n/(n-1)$, $\sup G_{\max} - \sup G_{\max}^{(n)} = 0.99/(n-1)$, 显然 $\sup G_{\max} - \sup G_{\max}^{(n)} \to 0 (n \to \infty)$。

自上面的分析过程不难看出, ε-近优最值策略可以有效地解决函数列和极限函数的最大 (小)最值点的逼近问题, 而这样的逼近结果足可以满足实际问题的需要。

参考文献:

[1] HOLLAND J H. Genetic algorithms and the optimal allocations of trials[J]. SIAM J of Computing, 1973, (2): 8-10.

[2] SCHWEFEL H P. Kybernetische Evolution Als Strategie Der Experimentellen Forschung in Der Stropmung Stechnik[M]. Diplomarbeit Technische Universitat Berlin, 1965.

[3] FOGEL D B. Evolutionary Computation: Toward a New Philosophy of Machine Intelligence[M]. New York: IEEE Press, 1995.

[4] 瓦普尼克. 统计学习理论的本质 [M]. 张学工译 . 北京: 清华大学出版社, 2000.

[5] 冯德兴 . 凸分析基础 [M]. 北京: 科技出版社, 1995. 130-137.

[6] 吴通庆 . 一致连续与一致收敛 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1982. 24-77.