第 27卷第 2期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol 27, No 2
2006年 6月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　June 2006

文章编号: 1008-1542(2006)02-0103-04

函数的近优最值及其在函数优化过程中的应用

王书田[1], 李法朝[2]

(1. 河北工业职业技术学院基础部, 河北石家庄　050091; 2. 河北科技大学经济管理学院, 河北石家庄　050018)

摘　要: 系统地讨论了函数列 $\{f_n(x)\}$ 的最值(点)与极限函数 $f(x)$ 的最值(点)之间的逼近联系, 在通过具体实例分析的基础上, 首先给出了 $\{f_n(x)\}$ 和 $f(x)$ 的最值点唯一时, 最值(点)之间的收敛条件, 进而引入了 ε-近优最大(小)值(点)的概念, 并在近优意义下给出了 $\{f_n(x)\}$ 和 $f(x)$ 的最值点逼近定理。

关键词: 收敛; 一致收敛; 最大 最值点; ε-近优 最值

中图分类号: O174 13　　文献标识码: A

Approximate-optimal extremum and its application in the process of function optimization

WANG Shu-tian[1], LI Fa-chao[2]

(1. Department of Basic Sciences, Hebei Institute of Industry and Technology, Shijiazhuang Hebei 050091, China; 2. College of Economics and Management, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: In this paper, we mainly discuss the approximating relation between the extremums (points) of functions sequence $\{f_n(x)\}$ and the limiting function $f(x)$. Firstly, by the analysis of actual examples, we give the convergence condition when the extremum ponits of $f_n(x)$ and $f(x)$ are unique. Furthermore, we introduce the concepts of ε-approximation maximum (of minimum) value point, and also give the approximation theorem about the extremum points of $\{f_n(x)\}$ and $f(x)$ under the approximate-optimal condition.

Key words: convergence; uniform convergence; max-minimum point; ε-approximation extremum

随着计算机科学和信息技术的发展, 一些实用优化方法[1~4]在某些实际领域中有了成功的应用, 取得了显著的经济和社会效益。函数优化方法作为这些优化方法的基础, 在优化理论中占居着主导地位。虽然函数优化理论已比较成熟, 但仍存在尚待进一步澄清和完善的内容, 例如: 当函数列 $\{f_n(x)\}$ 在某范围 D 上逐点收敛于函数 $f(x)$ 时, $f_n(x)$ 的最值(点)与 $f(x)$ 的最值(点)之间的逼近联系等等, 而该问题又是优化控制领域所必须面对的。针对此问题, 本文在通过具体实例分析的基础上, 引入 ε-近优最大(小)值点的概念, 较为系统地研究了 $\{f_n(x)\}$ 和 $f(x)$ 的最值(点)之间的逼近关系, 为建立更为有效的优化方法奠定了基础。

本文中用 $\mathbf{R}$ 表示实数域, $\mathbf{R}^m$ 表示 m 维欧几里德空间。

1　问题的提出

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在点集 $D\subset\mathbf{R}^m$ 上逐点收敛于 $f(x)$ (即 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 对任何 $x\in D$ 成立), 假若

收稿日期: 2005-11-22; 修回日期: 2005-12-26; 责任编辑: 张　军
基金项目: 国家"九七三"计划项目(2002CB3122); 河北省博士基金资助项目(B2004509); 河北省科技攻关项目(05547004D-2)
作者简介: 王书田(1962-), 男, 河北石家庄人, 高级讲师, 主要从事模糊信息处理、智能优化等方面的研究。

$f_n(x)$和$f(x)$在D上均存在最大(小)值点x_n和x_0, 若记$m_n=f_n(x_n)$, $m_0=f(x_0)$; 那么自然地希望m_n与m_0, x_n与x_0之间满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}m_n=m_0$, 但事实上该关系不一定成立。

例 **1** 设$f_n(x)=nx(1-x)^n$, $f(x)\equiv 0$, 则$\{f_n(x)\}$在$[0, 1]$逐点收敛于$f(x)$, 由于$f_n(x)$和$f(x)$在$[0, 1]$上连续, 因而$f_n(x)$和$f(x)$在$[0, 1]$必定存在最大值和最小值, 利用$f_n'(x)=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]=0$可知, $f_n(x)$在$[0, 1]$上存在唯一的最大值点$x_n=(n+1)^{-1}$, 从而$f_n(x)$在$[0, 1]$的最大值为$m_n=[1-(n+1)^{-1}]^{n+1}$, 显然, $\lim\limits_{n\to\infty}m_n=\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f_n(x)=e^{-1}=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=m_0$。

例 1表明, 函数列的最值(点)与极限函数的最值(点)不一定满足逼近关系, 下面笔者分最值点唯一和不唯一 2种情况来讨论它们之间的关系。

2 最值点唯一的情形

2.1 主要结果

定理 **1** 设$\{f_n(x)\}$为开凸集$D\subset\mathbf{R}^m$上的一列凸函数, $f_n(x)$在D上收敛于函数$f(x)$。若$f_n(x)$和$f(x)$在D内均存在唯一的最小值点x_n和x_0, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$。

定理 **2** 设$\{f_n(x)\}$为$D\subset\mathbf{R}^m$上的一列函数, 且$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于函数$f(x)$。若$f_n(x)$和$f(x)$在D上均存在最小值m_n和m_0, 则$\lim\limits_{n\to\infty}m_n=m_0$。

定理 **3** 设$D\subset\mathbf{R}^m$为紧集, $\{f_n(x)\}$为D上的一列连续函数, 且$\{f_n(x)\}$在D上一致收敛于函数$f(x)$。若$f_n(x)$和$f(x)$在D内均存在唯一的最小值点x_n和x_0, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$。

2.2 主要结果的证明

引理 **1** 设$D\subset\boldsymbol{R}^m$是开凸集, $f(x)$为D上的凸函数, S为D内的封闭曲面, S将D分为内外 2部分A和B。若$x_0\in A$满足$\inf\{f(x)\mid x\in S\}>f(x_0)$, 则对任何$x\in B$, 有$f(x)>f(x_0)$。

证明 用反证法。

若存在$x_1\in B$使得$f(x_1)\leqslant f(x_0)$, 则必存在$\lambda\in(0, 1)$使得$\lambda x_0+(1-\lambda)x_1\in S$, 由凸函数的定义知$f(\lambda x_0+(1-\lambda)x_1)\leqslant\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(x_1)\leqslant f(x_0)$。这与$\inf\{f(x)\mid x\in S\}>f(x_0)$矛盾。

引理 **2** 设$\{f_n(x)\}$为开凸集$D\subset\mathbf{R}^m$上的一列凸函数, 且$\{f_n(x)\}$在D上逐点收敛于函数$f(x)$, 则$\{f_n(x)\}$在D的每一紧子集上一致收敛于$f(x)$。

该引理的证明详见文献[5]或文献[6]。

定理 **1**的证明 $\forall\varepsilon>0$, 记$S=\{x\mid x\in D, \|x-x_0\|=\varepsilon\}$, $S'=\{x\mid x\in D, \|x-x_0\|\leqslant\varepsilon\}$, 利用$D$为开集, 不妨设$S\subset D$, $S'\subset D$, 显然, S, S'均为$\mathbf{R}^m$上的紧集, 由引理 2可知, 在S和S'上$\{f_n(x)\}$均一致收敛于$f(x)$。结合凸函数的连续性, S的紧性以及最小值点x_0的唯一性可知, 存在$\delta>0$使得

$$\inf\{f(x)\mid x\in S\}>f(x_0)+\delta \tag{1}$$

由于$\{f_n(x)\}$在S'上一致收敛于$f(x)$, 故存在自然数$N=N(\varepsilon)$, 当$n>N$时有

$$|f_n(x)-f(x)|<\delta/2,\ \forall x\in S' \tag{2}$$

由式(1)和式(2)可得, 当$x\in S$时, 有$f_n(x)>f(x)-\delta/2>f(x_0)+\delta/2>f_n(x_0)$, 从而$\inf\{f_n(x)\mid x\in S\}>f_n(x_0)$。结合引理 1可得, 当$n>N$且$\|x-x_0\|\geqslant\varepsilon$时, 有$f_n(x)>f_n(x_n)$, 由此及$x_n$的定义可知, 当$n>N$时, 必有$\|x_n-x_0\|<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。

上面的讨论表明, 当$n>N$时必有$x_n\in S'\setminus S$, 利用$\{f_n(x)\}$在S'上一致收敛于$f(x)$可知, 存在自然数$N_1>N$, 当$n>N_1$时, 有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon/2, \tag{3}$$

利用$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$及凸函数的连续性可知, 存在$N_2>N$, 使当$n>N_2$时有

$$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon/2。 \tag{4}$$

取$N^*=\max\{N_1, N_2\}$, 则当$n>N^*$时, 利用式(3)和式(4)可得$|f_n(x_n)-f(x_0)|\leqslant|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$, 即$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$。

定理 **2**的证明 记$m_n=f_n(x_n)$, $m_0=f(x_0)$, $x_n, x_0\in D$。由$\{f_n(x)\}$的一致收敛于$f(x)$可知, $\forall\varepsilon>0$存在

自然数 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时, $\forall x\in D$, 有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$, 特别地有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad |f_n(x_n)-f(x_n)|<\varepsilon \tag{5}$$

由此可得 $f_n(x_n)\leqslant f_n(x_0)<f(x_0)+\varepsilon$, $f_n(x_n)>f(x_n)-\varepsilon\geqslant f(x_0)-\varepsilon$, 即 $|f_n(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} m_n=m_0$。

注 **1**　在定理 2的条件下, 即使 $f_n(x)$和 $f(x)$在 D 上的最小值点 x_n 和 x_0 唯一, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 也不一定成立, 请看下面的例子。

例 **2**　设 $f_n(x)=\begin{cases}2(1-x)/n, & 0\leqslant x<2/n,\\ x(1-x), & 2/n\leqslant x\leqslant 1-1/n,\\ x/n, & 1-1/n<x<1,\end{cases}$ $n=4,5,\cdots$, $f(x)=x(1-x)$, $D=[0,1)$。

容易验证在 D 上 $\{f_n(x)\}$一致收敛于 $f(x)$, 且 $f_n(x)$在 D 上存在唯一的最小值点 $x_n=1-1/n$, $f(x)$在 D 存在唯一的最小值点 $x_0=0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1\neq x_0$。

定理 **3**的证明　由 D 的紧性、$f(x)$的连续性及其最小值点 x_0 的唯一性可知, $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 当 $\|x-x_0\|\geqslant\varepsilon$时, 有 $f(x)\geqslant f(x_0)+\delta$。由 $\{f_n(x)\}$一致收敛性可知, 存在自然数 $N=N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时, $|f_n(x)-f(x)|<\delta/2$对任何 $x\in D$ 成立, 特别有

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\delta/2,\quad |f_n(x_n)-f(x_n)|<\delta/2 \tag{6}$$

由此及 x_n 和 x_0 的定义可知, 当 $n>N$ 时,

$$f_n(x_n)\leqslant f_n(x_0)<f(x_0)+\delta/2,\quad f_n(x_n)>f(x_n)-\delta/2\geqslant f(x_0)-\delta/2,$$

即

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|<\delta/2。 \tag{7}$$

结合式 (6)和式 (7)可得, 当 $n>N$ 时, 有 $|f(x_n)-f(x_0)|\leqslant|f(x_n)-f_n(x_n)|+|f_n(x_n)-f(x_0)|<\delta$, $f(x_n)<f(x_0)+\varepsilon$, 这表明, 当 $n>N$ 时, 有 $\|x_n-x_0\|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。

关于 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$可由定理 2直接推出。

注 **2**　本部分的结论对于最大值 (点)的情况也成立, 只要将相关结论中的凸函数改为凹函数即可, 证明过程完全类似。

3　最值点不唯一的情形

3.1　ε-近优最值的概念

以上的理论与例题都是针对极限函数为最大 (小)值点是唯一存在的情况, 下面笔者讨论函数的最大 (小)值点不是唯一的情况。

例 **3**　设 $G(t)$和 $G_n(t)$为 $(-\infty,\infty)$上的如下函数 (几何特征见图 1)。

$$G(t)=\begin{cases}-t, & t<-1,\\ 1, & -1\leqslant t\leqslant 1,\\ t, & t>1,\end{cases}\quad G_n(t)=\begin{cases}-t, & t<-1,\\ 1+(t+1)/(2n+1), & -1\leqslant t\leqslant 1+1/n,\\ t, & t>1+1/n,\end{cases}\quad n=1,2,\cdots,$$

则对任何自然数 n 以及 $t\in(-\infty,\infty)$, 有 $G_n(t)\geqslant G(t)$, $G_n(t)\geqslant G_{n+1}(t)$, $\min\limits_{t\in R}G(t)=\min\limits_{t\in R}G_k(t)=1$, $0\leqslant G_n(t)-G(t)\leqslant 1/n$, $\sup\{u\,|\,G(u)=\min\limits_{t\in R}G(t)\}=1$, $\sup\{u\,|\,G_n(u)=\min\limits_{t\in R}G_n(t)\}=-1$, 从而 $\{G_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$在 $(-\infty,\infty)$内单调不增且一致收敛于 $G(t)$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{u\,|\,G_n(u)=\min\limits_{t\in R}G_n(t)\}\neq\sup\{u\,|\,G(u)=\min\limits_{t\in R}G(t)\}$。

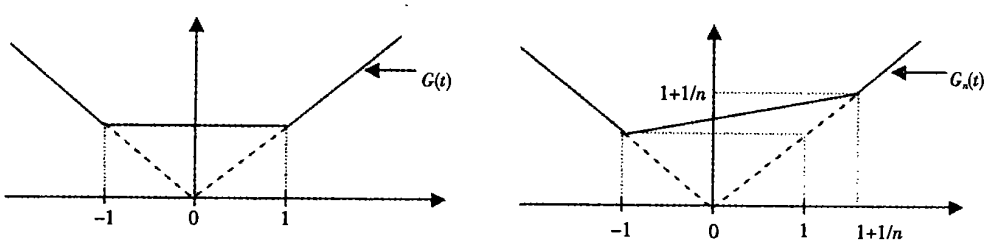

图 1　例 3的函数释义图

Fig 1　Diagrammatic sketch of function in eg 3

例 **4** 设 $G(t)$和 $G_n(t)$为 $(-\infty, \infty)$上的如下函数 (几何特征见图 2)。

$$G(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 1, & 1< t\leqslant 3,\\ 4-t, & 3< t\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases} \quad G_n(t)=\begin{cases} t, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ 1+(1-t)/(2n), & 1< t\leqslant 3,\\ (1-1/n)(4-t), & 3< t\leqslant 4,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

则对任何自然数 n 以及 $t\in(-\infty, \infty)$, 有 $G_n(t)\leqslant G(t)$, $G_n(t)\leqslant G_{n+1}(t)$, $\max\limits_{t\in R} G(t)=\max\limits_{t\in R} G_n(t)=1$, $0\leqslant G_n(t)\leqslant G(t)\leqslant 1/n$, $\sup\{u\,|\,G(u)=\max\limits_{t\in R} G(t)\}=3$, $\sup\{u\,|\,G_n(u)=\max\limits_{t\in R} G_n(t)\}=1$, 从而 $\{G_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$在 $(-\infty, \infty)$内单调不减且一致收敛于 $G(t)$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{u\,|\,G_n(u)=\max\limits_{t\in R} G_n(t)\}\neq\sup\{u\,|\,G(u)=\max\limits_{t\in R} G(t)\}$。

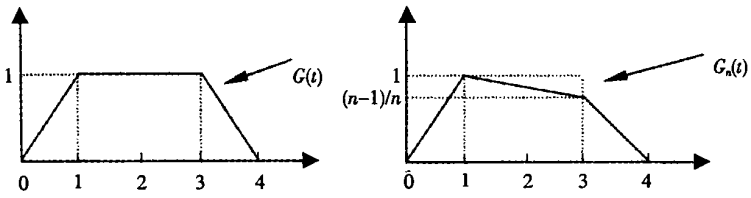

图 2 例 4的函数释义图

Fig 2 Diagrammatic sketch of function in eg 4

上述 2个例子中的 $G_n(t)$的最大最值点均不收敛于 $G(t)$的最大最值点, 但若给 $G_n(t)$的最值一个很小的松动 ε, 即可使 $G_n(t)$的最大最值点在该松动 ε意义下收敛于 $G(t)$的最大最值点, 为此笔者引入函数的近优最值概念。

定义 **1** 设函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$上的最大值 (或最小值)存在。对给定的 $\varepsilon>0$, 若 $u\in[a, b]$满足 $f(u)-\varepsilon\leqslant\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ (或 $f(u)+\varepsilon\geqslant\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$), 则称 $f(u)$为 $f(x)$在 $[a, b]$上的 ε-近优最小 (或最大)值, u 称为 $f(x)$在 $[a, b]$上的 ε-近优最小 (或最大)值点, ε称为 $f(x)$在 $[a, b]$上的近优度。

近优度 ε相当于一种弹性限制, 从理论上讲, 当 ε充分小的时候, 所得到的 ε-近优最值 (点)与理论上的最优值 (点)相差甚少, 对所考虑的问题不会带来质的影响, 同时又可避免理论上的一些极端现象。该方法在处理实际问题中的最优逼近过程中具有较强的实用性和可操作性。

3.2 主要结果及证明

定理 **4** 设函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$上连续, x_0 为 $f(x)$在 $[a, b]$上的最大最小值点, $x_n\in[x_0, b]$满足 $f(x_n)-f(x_0)\leqslant 1/n$ 且当 $x\in(x_n, b]$时, $f(x)-f(x_0)>1/n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。

证明 假若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 不成立, 则必定存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列 (仍记为 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$)及 $x^*\in(x_0, b]$使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$。利用 $f(x)$的连续性以及 $0\leqslant f(x_n)-f(x_0)\leqslant 1/n$ 可知 $f(x_0)=f(x^*)$, 即 $f(x^*)$为 $f(x)$在 $[a, b]$上的最小值且 $x_0<x^*$, 此与 x_0 的定义矛盾, 这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。

注 **3** 定理 4中 $1/n$ 可以推广为 $\delta(n)$ (其中 $\delta(n)$满足 $\delta(n)>0$ 且 $\delta(n)\to 0(n\to\infty)$)。

类似于定理 4有下面的结论。

定理 **5** 设函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$上连续, x_0 为 $f(x)$在 $[a, b]$上的最小最小值点, $x_n\in[a, x_0]$满足 $f(x_n)-f(x_0)\leqslant 1/n$ 且当 $x\in[a, x_n)$时, $f(x)-f(x_0)>1/n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。

定理 **6** 设函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$上连续, x_0 为 $f(x)$在 $[a, b]$上的最大最大值点, $x_n\in[x_0, b]$满足 $f(x_0)-f(x_n)\leqslant 1/n$ 且当 $x\in[x_n, b)$时, $f(x_0)-f(x)>1/n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。

定理 **7** 设函数 $f(x)$在区间 $[a, b]$上连续, x_0 为 $f(x)$在 $[a, b]$上的最小最大值点, $x_n\in[a, x_0]$满足 $f(x_0)-f(x_n)\leqslant 1/n$ 且当 $x\in[a, x_n)$时, $f(x_0)-f(x)>1/n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$。

注 **4** 定理 5表明, 对于连续函数而言, 当近优度 ε充分小时, $f(x)$在 $[a, b]$上的最大 ε-近优最小值点与理论上的最大最小值点之间的差别 δ也很小 (理论上有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta=0$)。

(下转第 **109**页)

2 例　子

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t)\left[1 - x_1(t) - \dfrac{x_2(t)}{1+x_1(t)}\right], \\ x_2(t) = x_2(t)\left[1 - \dfrac{x_2(t-\tau)}{x_1(t-\tau)}\right], \end{cases} \tag{8}$$

此时, $c(x_1) = \dfrac{ax_1}{1+mx_1}$系统 (1)为 Holling-Tanner型捕食系统。可以验证系统 (8)有唯一的正平衡点 ($\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$), 并且符合定理条件, 系统 (1)正平衡点当 $\tau < 1.568\,9$时稳定, 在 $\tau = 1.568\,9$附近分支出周期解。

参考文献:

[1] LESLIE P H, GOWER J C. The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species[J]. Biometrika, 1960, 47(1): 219-233.

[2] BERETTA E, KUANG Y. Global analysis in some delayed ratio-dependent predator-prey systems[J]. Nonlinear Analysis TMA, 1998, 32(3): 381-408.

[3] FREEDMAN H I, RAO HAIR SREE V. The trade-off between mutual interference and time lags in predator-prey system[J]. Bull Math Biol, 1983, 45(12): 991.

(上接第 **106**页)

3.3 近优逼近的例题分析

下面在近优意义下来分析例 3和例 4。

在例 3中, 若采用 ε-近优最值方法, 不妨取近优度 $\varepsilon = 0.01$, 则当 $n \geqslant 100$时, $G(t)$和 $G_n(t)$的 ε-近优最小值点集合分别为 $G_{\min} = [0.99, 1.01]$和 $G_{\min}^{(n)} = [0.99, 1.01]$, 从而 $\sup G_{\min} = 1.01$, $\sup G_{\min} = \sup G_{\min}^{(n)} = 1.01$, $\sup G_{\min}^{(n)} - \sup G_{\min} = 0$, 显然 $\sup G_{\min}^{(n)} - \sup G_{\min} \to 0 (n \to \infty)$。

在例 4中, 若采用 ε-近优最值方法, 不妨取近优度 $\varepsilon = 0.01$, 则当 $n \geqslant 100$时, $G(t)$和 $G_n(t)$的 ε-近优最大值点集合分别为 $G_{\max} = [0.99, 3.01]$和 $G_{\max}^{(n)} = [0.99, 4 - 0.99n/(n-1)]$, 从而 $\sup G_{\max} = 3.01$, $\sup G_{\max}^{(n)} = 4 - 0.09n/(n-1)$, $\sup G_{\max} - \sup G_{\max}^{(n)} = 0.99/(n-1)$, 显然 $\sup G_{\max} - \sup G_{\max}^{(n)} \to 0 (n \to \infty)$。

自上面的分析过程不难看出, ε-近优最值策略可以有效地解决函数列和极限函数的最大 (小)最值点的逼近问题, 而这样的逼近结果足可以满足实际问题的需要。

参考文献:

[1] HOLLAND J H. Genetic algorithms and the optimal allocations of trials[J]. SIAM J of Computing, 1973, (2): 8-10.

[2] SCHWEFEL H P. Kybernetische Evolution Als Strategie Der Experimentellen Forschung in Der Stropmung Stechnik[M]. Diplomarbeit Technische Universitat Berlin, 1965.

[3] FOGEL D B. Evolutionary Computation: Toward a New Philosophy of Machine Intelligence[M]. New York: IEEE Press, 1995.

[4] 瓦普尼克. 统计学习理论的本质 [M]. 张学工译 . 北京: 清华大学出版社, 2000.

[5] 冯德兴 . 凸分析基础 [M]. 北京: 科技出版社, 1995. 130-137.

[6] 吴通庆 . 一致连续与一致收敛 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1982. 24-77.