第 26 卷第 3 期 河 北 科 技 大 学 学 报 Vol. 26, No. 3
2005 年 9 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Sept. 2005

文章编号: 1008-1542(2005)03-0187-04

Boussinesq 方程的新精确解

田贵辰[1], 赵丽琴[1], 刘希强[2]

(1. 石家庄学院数学系, 河北石家庄 050035; 2. 聊城大学数学学院, 山东聊城 252059)

摘 要: 通过改变待定函数的次序, 对齐次平衡法进行了推广。利用这种推广的齐次平衡法, 求得了 1 组 Boussinesq 方程的一些新精确解, 其中包括孤立波解及由椭圆函数表达的周期解。所得到的解推广了庞小峰、刘式达等人研究的有关结果。

关键词: 齐次平衡法; Boussinesq 方程; 精确解

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

New exact solutions of the Boussinesq equations

TIAN Gui-chen[1], ZHAO Li-qin[1], LIU Xi-qiang[2]

(1. Department of Mathematics, Shijiazhuang College, Shijiazhuang Hebei 050035, China; 2. School of Mathematical Siences, Liaocheng University, Liaocheng Shandong 252059, China)

Abstract: We generalize the homogenous balance method by changing the order of functions to be determined. Applying the generalized homogenous balance method, we obtain some new exact solutions to some Boussinesq type equations, which include solitary wave solutions and periodic solutions expressed by elliptic functions. We generalized the results in those of the past papers.

Key words: homogeneous balance method; Boussinesq equation; exact solution

非线性演化方程的求解问题是物理等许多领域中需要解决的基本问题之一, 因此它受到众多学者的广泛关注。本文中将讨论下述 3 类 Boussinesq 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{3}{a}(u^3)_{xx}\beta^2 u_{xxtt} = 0, \tag{1}$$

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{a}{2}(u^2)_{xx} - \beta u_{xxxx} = 0, \tag{2}$$

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{a}{2}(u^2)_{xx} - \beta u_{xxtt} = 0, \tag{3}$$

的精确解, 其中 α, β 为常数。

由于 Boussinesq 方程可以用来描述 2 个相反方向传播的 KdV 孤波, 也可以描述一维非线性晶格的振动[1,2], 因此, 方程(1)—(3)的研究受到许多学者的关注[3~5]。利用齐次平衡法的原理, 扩展齐次平衡法[6]的应用, 从而可获得 Boussinesq 方程(1)—(3)的一些新精确解, 且这些显式解可通过椭圆周期来表达。本文推广了文献[3]和文献[4]中的结果。

1 Boussinesq 方程的精确解

首先, 通过(1+1)维非线性偏微分方程

收稿日期: 2004-05-10; 修回日期: 2004-11-19; 责任编辑: 王士忠

作者简介: 田贵辰(1955-), 男, 河北栾城人, 副教授, 主要从事非线性偏微分方程理论及其应用方面的研究。

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$P(x, t, u, u_x, w, u_{xx}, \cdots) = 0, \tag{4}$$

简要说明齐次平衡法, 其中: P 是相应变量的已知函数; x, t 是自变量。为了求解方程(4), 构造辅助函数

$$u = \frac{\partial^{\alpha} f(r)}{\partial x^{\alpha}} + f(r)\text{的低阶导数项}, \tag{5}$$

其中: $r = r(x, t)$; f 是待定函数; 自然数 α 通过式(4)中高阶导数项和非线性项的平衡确定。把式(5)代入式(4)使求解式(4)的问题转化为求解 f, r 的偏(或常)微分方程问题。在利用齐次平衡时, 通常是先确定函数 f, 然后再确定 $r(x, t)$。而本文中是先确定 r, 然后求解关于 f 的常微分方程。由此, 可得到一些以往利用齐次平衡法不能得到的椭圆函数表达的显式解, 利用这种方法, 可求出 Boussinesq 方程(1)—(3)的一些新精确解。

1.1 方程(**1**)的精确解

对于方程(1), 选择变换

$$u = \frac{\partial f(r)}{\partial x} + b = f' r_x + b, \tag{6}$$

其中: $u = u(x, t)$; f, $r = r(x, t)$ 是待定函数; $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$; b 为待定常数。由 $u_{tt} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_x$, 方程(1)可写为

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u_x + \frac{3}{a}(u^3)_x - \beta^2 u_{xtt}\right)_x = 0。 \tag{7}$$

对方程(7)等号两边的 x 积分一次得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - u_x + \frac{3}{a}(u^3)_x - \beta^2 u_{xtt} = c, \tag{8}$$

其中 c 为积分常数。将式(6)代入式(8)得

$$\begin{aligned} &-\beta^2 r_x^2 r_t^2 f^{(4)} + \frac{9}{a} r_x^4 f'^2 f'' - \beta^2 (r_x^2 r_{tt} + 4 r_x r_t r_{xt} + r_t^2 r_{xx}) f''' + \frac{9}{a} r_x^2 r_{xx} f'^3 + \\ &\frac{18b}{a} r_x^3 f' f'' + \left[r_t^2 - r_x^2 + \frac{9b^2}{a} r_x^2 - \beta^2 (2 r_{xt}^2 + 2 r_x r_{xtt} + r_{xx} r_{tt} + 2 r_t r_{xxt})\right] f'' + \\ &\left(r_{tt} - r_{xx} + \frac{9b^2}{a} r_{xx} + \frac{18b}{a} r_x r_{xx} - \beta^2 r_{xxtt}\right) f' = c。 \end{aligned} \tag{9}$$

为简便起见, 取 $r(x, t) = px + qt$, $c = 0$, 其中 p, q 为常数。由式(9)得到

$$-\beta^2 p^2 q^2 f^{(4)} + \frac{9p^4}{a} f'^2 f'' + \frac{18p^3 b}{2} f'' f' + \frac{a(q^2 - p^2) + 9p^2 b^2}{a} f'' = 0。 \tag{10}$$

令 $g = f'$, 且式(10)等号两边积分 2 次得到

$$g'^2 = \frac{3p^2}{2a\beta^2 q^2} g^4 + \frac{6pb}{a\beta^2 q^2} g^3 + \frac{a(q^2 - p^2) + 9p^2 b^2}{a\beta^2 p^2 q^2} g^2 + \frac{2d}{\beta^2 p^2 q^2} g + \frac{2h}{\beta^2 p^2 q^2}, \tag{11}$$

其中 d 和 h 为积分常数。方程(11)是椭圆型方程, 且有由椭圆函数表达的解(见文献[7]的第 32~53 页)。只要通过式(11)求出 g(即 f'), 便可由式(6)得到方程(1)的显式解。下面就方程(11)中 $b = 0$, $d = 0$ 时的情况进行讨论(其他的情况类似)。

当 $b = 0$, $d = 0$ 时, 方程(11)写为

$$g'^2 = \frac{3p^2}{2a\beta^2 q^2} g^4 + \frac{q^2 - p^2}{\beta^2 p^2 q^2} g^2 + \frac{2h}{\beta^2 p^2 q^2}。 \tag{12}$$

1) 当 $a > 0$, $q^2 - p^2 < 0$, $0 < h < \frac{a(q^2 - p^2)^2}{12p^4}$ 时, 方程(12)有解

$$g = A\,\mathrm{ns}(\mu r, k), \tag{13}$$

其中: $k = \sqrt{\frac{a(q^2 - p^2)^2 - 6p^4 h - \theta_1}{6p^4 h}}$; $\theta_1 = \sqrt{a(q^2 - p^2)^2 [a(q^2 - p^2)^2 - 12p^4 h]}$;

$A = \sqrt{\frac{-2a(q^2 - p^2)}{3p^4(1 + k^2)}}$; $\mu = \sqrt{\frac{-(q^2 - p^2)}{\beta^2 p^2 q^2 (1 + k^2)}}$; $\mathrm{ns}(\mu r, k) = 1/\mathrm{sn}(\mu r, k)$, $\mathrm{sn}(\mu r, k)$ 是椭圆正弦函数。

当 $k \to 0$(即 $h \to 0$)时, 方程(13)化为

$$g = \sqrt{\frac{-2a(q^2 - p^2)}{3p^4}} \csc\left(\sqrt{\frac{-(q^2 - p^2)}{\beta^2 p^2 q^2}} r\right)。 \tag{14}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 $k\to 1$(即 $h\to\frac{a(q^2-p^2)^2}{12p^4}$)时, 方程(13)化为

$$g=\sqrt{\frac{-a(q^2-p^2)}{3p^4}}\coth\left(\sqrt{\frac{-(q^2-p^2)}{2\beta^2p^2q^2}}r\right)。\tag{15}$$

于是, 从式(13)—(15)得方程(1)的解分别为

$$u=Ap\,\mathrm{ns}[\mu(px+qt),k],\tag{16}$$

$$u=\sqrt{\frac{-2a(q^2-p^2)}{3p^2}}\csc\left[\sqrt{\frac{-(q^2-p^2)}{\beta^2p^2q^2}}(px+qt)\right],\tag{17}$$

$$u=\sqrt{\frac{-a(q^2-p^2)}{3p^4}}\coth\left[\sqrt{\frac{-(q^2-p^2)}{2\beta^2p^2q^2}}(px+qt)\right]。\tag{18}$$

2) 当 $a<0, q^2-p^2>0, h>0$ 时, 方程(12)有解

$$g=A\,\mathrm{cn}(\mu r,k),\tag{19}$$

其中: $k=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\theta_2}{a(q^2-p^2)^2-12p^4h}\right)}$; $\theta_2=\sqrt{a(q^2-p^2)^2[a(q^2-p^2)^2-12p^4h]}$; $A=\sqrt{\frac{-2a(q^2-p^2)k^2}{3p^4(2k^2-1)}}$; $\mu=\sqrt{\frac{q^2-p^2}{\beta^2p^2q^2(2k^2-1)}}$; $\mathrm{cn}(\mu r,k)$ 是具有模 k 的椭圆余弦函数。此时方程(1)相应于式(19)的解为

$$u=Ap\,\mathrm{cn}[\mu(px+qt),k]。\tag{20}$$

1.2　方程(2)的精确解

对于方程(2), 选择变换

$$u=\frac{\partial^2f(r)}{\partial x^2}+b=f''r_x^2+f'r_{xx}+b,\tag{21}$$

取 $r=px+qt$, 其中 p, q, b 为待定常数, 由式(21), 方程(2)化为

$$-\beta p^4f^{(4)}+\frac{ap^4}{2}f''^2+(q^2-p^2+ap^2b)f''+\frac{ab^2}{2}-b=l,\tag{22}$$

式中 l 为积分常数。令 $g=f''$, 同样对式(22)等号两端关于 r 积分可得到

$$g'^2=\frac{a}{3\beta}g^3+\frac{m}{\beta p^4}g^2+\frac{n}{\beta p^4}g+2h,\tag{23}$$

其中: $m=q^2-p^2+ap^2b$, $n=ab^2-2b-2l$; h 为另一积分常数。根据文献[6]中的结果, 对方程(23)仅讨论 $h=0$的情况(其他的情况类似)。

当 $h=0$ 时, 方程(23)化为

$$g'^2=\frac{a}{3\beta}g^3+\frac{m}{\beta p^4}g^2+\frac{n}{\beta p^4}g。\tag{24}$$

1) $a>0, m\beta>0, 0<n<\frac{2m^2}{4ap^4}$ 时, 方程(24)有解

$$g=A\,\mathrm{dn}^2(\mu r,k),\tag{25}$$

其中: $k=\sqrt{\frac{4ap^4n-3m^2+w_1}{2ap^4n}}$; $w_1=\sqrt{3m^2(3m^2-4ap^4n)}$; $A=\frac{-3m}{ap^4(2-k^2)}$; $\mu=\sqrt{\frac{m}{4\beta p^4(2-k^2)}}$; $\mathrm{dn}(\mu r,k)$ 是第 3 种 Jacobi 椭圆函数。当 $k\to 1$(即 $n\to 0$)时, 式(25)化为

$$g=\frac{-3m}{ap^4}\mathrm{sech}^2\left(\sqrt{\frac{m}{4\beta p^4}}r\right)。\tag{26}$$

方程(2)相应于式(25)、式(26)的解分别为

$$u=Ap^2\,\mathrm{dn}^2[\mu(px+qt),k]+b,\tag{27}$$

$$u=\frac{-3m}{ap^2}\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{m}{4\beta p^4}}(px+qt)\right]+b,\tag{28}$$

其中: $m=q^2-p^2+ap^2b$; $n=ab^2-2b-2l$。

2) $a>0, m\beta<0, 0<n<\frac{2m^2}{4ap^4}$时, 方程(24)有解

$$g=A\,\mathrm{sn}^2(\mu r,k),\tag{29}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中: $k=\sqrt{\dfrac{3m^2-2ap^4n-w_2}{2ap^4n}}$; $w_2=\sqrt{3m^2(3m^2-4ap^4n)}$; $A=\dfrac{-3mk^2}{ap^4(1+k^2)}$; $\mu=\sqrt{\dfrac{-m}{4\beta p^4(1+k^2)}}$。

当 $k\to 1$(即 $n\to\dfrac{3m^2}{4ap^4}$)时, 式(29)化为

$$g=\frac{-3m}{2ap^4}\tanh^2\left(\sqrt{\frac{-m}{8\beta p^4}}r\right)。\tag{30}$$

方程(2)相应于式(29)、式(30)的解分别为

$$u=Ap^2\mathrm{sn}^2[\mu(px+qt),k]+b,\tag{31}$$

$$u=\frac{-3m}{2ap^2}\tanh^2\left[\sqrt{\frac{-m}{8\beta p^4}}(px+qt)\right]+b,\tag{32}$$

其中: $m=q^2-p^2+ap^2b$; $n=ab^2-2b-2l$。

注 1: 当取 $p=1, q=-c, b=0$ 时, 本文所得到的解(见式(29))与文献[3]所给方程(2)的解是一致的。当取 $p=1, q=-c, b=\dfrac{c^2-1}{2\beta}+\dfrac{2(1+m^2)\alpha k^2}{\beta}$ 时, 解的表达式(31)是文献[4]中的结果。所以本文推广了文献[3]、文献[4]的结果。

注 2: 对于方程(3), 选择变换式(21), 并令 $g=f''$, 可得到

$$g'^2=\frac{ap^2}{3\beta q^2}g^3+\frac{q^2-p^2+ap^2b}{\beta p^2q^2}g^2+\frac{ab^2-2b-2l}{\beta p^2q^2}g+2h,\tag{33}$$

其中 l 和 h 为积分常数。方程(33)与方程(23)有类似的解, 在此不再讨论。

注 3: 方程(1)与方程(2)除本文给出的解外, 还有许多由椭圆函数及椭圆函数的极限函数表达的精确解, 这里不再一一列出, 详细情况可根据文献[7]中的结果推出。

综上所述, 通过扩展的齐次平衡法, 本文得到了 Boussinesq 方程的一些新精确解。

2 结 语

基于齐次平衡法的原理, 通过改变待定辅助函数的确定次序, 可通过齐次平衡法求出非线性偏微分方程的许多新解。在本文中仅求出了 Boussinesq 方程的许多新精确解, 实际上, 这种方法还可以求出许多非线性发展方程的新解, 即这种方法具有较广泛的适用性。

参考文献:

[1] DEIFT P, TOMEI C, TYUBONITZ E. Inverse scttering and the Boussinesq equation, Commun[J]. Pure Appl Math, 1982, 35: 567-628.

[2] 庞小峰. 孤子物理学[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 2003. 28.

[3] 刘式达, 刘式适, 叶其孝. 非线性演化方程的显式行波解[J]. 数学的实践与认识, 1998, 28(4): 289-300.

[4] LIU S K, FU Z T, LIU S D, et al. Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations[J]. Phys Lett, 2001, A289: 69-74.

[5] 薛建华, 王 丽, 门艳彬, 等. 平顶高斯光束谐波场的横向分布[J]. 河北科技大学学报, 2004, 25(1): 12-14.

[6] WANG M L, ZHOU Y B, LI Z B. Applications of a homogenous balance method to exact solutions of nonlinear equations in mathematical physics[J]. Phys Lett, 1996, A216: 67-75.

[7] 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000.

庆祝抗日战争胜利 60 周年!

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net