第 26 卷第 3 期　　河北科技大学学报　　Vol. 26, No. 3
2005 年 9 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Sept. 2005

文章编号: 1008-1542(2005)03-0180-04

几类图的负对控制数

邢化明[1], 郭彦平[2]

(1. 廊坊师范学院数学系, 河北廊坊　065000; 2. 河北科技大学理学院, 河北石家庄　050018)

摘　要: 设 $D\subseteq V$ 是图 $G=(V,E)$ 的任意一个对控制集, 如果一个函数 $f:V\to\{-1,0,1\}$ 满足条件 1) 对任意点 $v\in D$, 有 $f(v)=1$, 对任意点 $v\in V-D$, 有 $f(v)\leqslant 0$, 2) 对任意点 $v\in V$, 均有 $f(N[v])\geqslant 1$, 则称函数 f 为图 G 的负对控制函数。负对控制函数 f 的重量 $f(V)$ 是 V 中所有点的函数值之和, 图 G 的负对控制数 $\gamma_p^-(G)=\min\{f(V)\mid f$ 是图 G 的负对控制函数$\}$。本文研究一些图的负对控制数。

关键词: 负对控制函数; 负对控制数; 对控制集

中图分类号: O157.5　　　文献标识码: A

On minus paired-domination number of some graphs

XING Hua-ming[1], GUO Yan-ping[2]

(1. Department of Mathematics, Langfang Normal College, Langfang Hebei 065000, China; 2. College of Sciences, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang Hebei 050018, China)

Abstract: Let $D\subseteq V$ be any paired-dominating set of $G=(V,E)$. A minus paired-dominating function of G is a function of the form $f:V\to\{-1,0,1\}$ such that $f(v)=1$ for any vertex $v\in D$, $f(v)\leqslant 0$ for any vertex $v\in V-D$, and $f(N[v])\geqslant 1$ for any vertex $v\in V$. The weight of a minus paired-dominating function f is the sum of $f(v)$, over all vertices $v\in V$. The minus paired-domination number of a graph G, $\gamma_p^-(G)=\min\{f(V)\mid f$ is a minus paired-dominating function of $G\}$. In this paper, we discuss the minus paired-domination number of some graphs.

Key words: minus paired-dominating function; minus paired-domination number; paired-dominating set

设 $G=(V,E)$ 是一个简单图, G 中顶点 v 的开邻域 $N(v)$ 是 G 中所有与点 v 相邻的顶点的集合, $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ 表示顶点 v 的闭邻域, 顶点 v 在图 G 中的度 $d_G(v)=|N(v)|$, 设 $S\subseteq V$, $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图。

1　图的负对控制数的定义

在文献[1]中定义了图的控制数的概念, 设 D 是 V 的子集, 如果集合 $V-D$ 中的任意点都与 D 中的点相邻, 则称 D 为图 G 的一个控制集。图 G 的最小控制集中的顶点数称为 G 的控制数, 记作 $\gamma(G)$。在文献[2]中定义了图的对控制的概念, 设 D 是图 G 的控制集, 如果 D 在 G 中的导出子图 $G[D]$ 有完美匹配, 则称 D 为图 G 的对控制集。图 G 的最小对控制集中的顶点数称为 G 的对控制数, 记作 $\gamma_p(G)$。在文献[3]中定义了图的负控

收稿日期: 2004-06-20; 修回日期: 2004-12-28; 责任编辑: 张　军
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371030); 河北省自然科学基金资助项目(603384); 2005 年山西省高校科技研究开发项目(20051254)
作者简介: 邢化明(1962-), 男, 河北廊坊人, 副教授, 博士, 主要从事图论方面的研究。

制的概念，设图 $G=(V,E)$，并且 $S\subseteq V$，对于图 G 的任何实值函数 $f:V\to R$，令 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$，并且把 $f(V)$ 称为函数 f 的重量。图 G 的一个函数 $f:V\to\{-1,0,1\}$，如果对于任何顶点 $v\in V$，均有 $f(N[v])\geqslant 1$，那么 f 是图 G 的负控制函数。图 G 的负 $\gamma^{-}(G)=\min\{f(V)\mid f$ 是图 G 的负控制函数$\}$。

定义[4]　设图 $G=(V,E)$ 没有孤立点，且 $D\subseteq V$ 是图 G 的任意一个对控制集，如果一个函数 $f:V\to\{-1,0,1\}$ 满足条件 1) 对任意点 $v\in D$，有 $f(v)=1$，对任意点 $v\in V-D$，有 $f(v)\leqslant 0$，2) 对任意点 $v\in V$，均有 $f(N[v])\geqslant 1$，则称函数 f 为图 G 的负对控制函数。图 G 的负对控制数 $\gamma_p^{-}(G)=\min\{f(V)\mid f$ 是图 G 的负对控制函数$\}$。

显然，任意没有孤立点的图 G 都存在着负对控制函数。关于图的对控制数、负控制数和负对控制数之间存在着下面的关系。

定理 1　对任意没有孤立点的图 G，均有 $\gamma^{-}(G)\leqslant\gamma_p^{-}(G)\leqslant\gamma_p(G)$。

证明　对于图 G 的任意一个对控制集 D，笔者定义图 G 的函数 f_D，使得 f_D 满足条件：对任意点 $v\in D$，有 $f_D(v)=1$；对任意点 $v\in V-D$，有 $f_D(v)=0$。令 $F=\{f_D\mid D$ 是图 G 的一个对控制集$\}$，显然，集合 F 中的所有函数都是图 G 的负对控制函数，并且图 G 的对控制数 $\gamma_p(G)$ 等于集合 F 中的所有函数中的最小重量，从而有 $\gamma_p^{-}(G)\leqslant\gamma_p(G)$。此外，因为图 G 的任意一个负对控制函数也是图 G 的一个负控制函数，所以 $\gamma^{-}(G)\leqslant\gamma_p^{-}(G)$。定理证毕。

2　一些图的负对控制数

定理 2　对任意正整数 k，都存在一个连通的二分图 G，使得 $\gamma_p^{-}(G)\leqslant -k$。

证明　构造如下的一簇二分图 G_n：首先，把完全二分图 $K_{n,n}(n\geqslant 2)$ 的 2 个部分的顶点进行标号，设标号集分别是 $W=\{1,2,\cdots,n\}$ 和 $W'=\{1',2',\cdots,n'\}$，然后，对 W 中的每一对不同的点 i 和 j 增加一个标号为 (i,j) 的点，使得点 (i,j) 仅仅与 W 中的点 i 和 j 相邻，这样共增加 $\binom{n}{2}$ 个点，同样地，再增加 $\binom{n}{2}$ 个标号为 (i',j') 的点，使得 (i',j') 仅仅与 W' 中的点 i' 和 j' 相邻，这样一共增加 $2\binom{n}{2}$ 个点，构成了一簇二分图 G_n，定义图 G_n 的函数 f，使得

$$f(v)=\begin{cases}1, & \text{如果 } v\in W\cup W',\\ -1, & \text{如果 } v\notin W\cup W'。\end{cases}$$

显然，f 是 G_n 的一个负对控制函数，并且其重量为 $w(f)=2n-2\binom{n}{2}=3n-n^2$。容易看出，对于任意正整数 k，可以在图簇 G_n 中找到一个二分图 G，使得图 G 的负对控制数 $\gamma_p^{-}(G)\leqslant -k$。

定理 3　对任意完全二分图 $K_{m,n}$，有 $\gamma_p^{-}(K_{m,n})=2$。

证明　设完全二分图 $K_{m,n}=(X,Y)$，且 $v_1\in X$，$v_2\in Y$，定义完全二分图 $K_{m,n}$ 的一个负对控制函数 $f:V\to\{-1,0,1\}$ 如下。

$$f(v)=\begin{cases}1, & \text{如果 } v\in\{v_1,v_2\},\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$$

显然，f 是完全二分图 $K_{m,n}$ 的一个最小的负对控制函数，且其重量为 $f(V)=2$，因此，$\gamma_p^{-}(K_{m,n})=f(V)=2$。

定理 4　对于任何顶点数为 n 的 r-正则图 G，均有 $\gamma_p^{-}\geqslant\dfrac{n}{r+1}$，并且不等式可以取等号。

证明　设 f 是一个满足 $f(V)=\gamma_p^{-}(G)$ 的 G 上的负对控制函数，考虑和式 $N=\sum_{v\in V}\sum_{u\in N[v]}f(u)$，对于每个顶点 $u\in V$，这个和式对 $f(u)$ 统计了恰恰 $d_G(u)+1$ 次，因此

$$N=\sum_{u\in V}(d_G(u))f(u)=(r+1)\sum_{v\in V}f(u)=(r+1)f(V)。$$

另一方面，

$$N=\sum_{u\in V}\sum_{u\in N(v)}f(u)=\sum_{v\in V}f(N(v))\geqslant\sum_{v\in V}1=n,$$

从而有，$r_p^{-}(G)\geqslant\dfrac{n}{r+1}$。

如果图 G 是一个 $n(n\geqslant 3)$ 个顶点的完全图，则有 $\gamma_p^{-}(G)=1=\dfrac{n}{r+1}$，此时不等式成为等式。

定理5 对于任意 $n(n\geqslant 2)$ 个顶点的路 P_n,有 $\gamma_p^-(P_n)=\lceil \frac{n-1}{3}\rceil+1$。

证明 设 $P_n=v_1v_2\cdots v_n$,令函数 f 是路 P_n 的一个最小的负对控制函数,显然,$f(v_1)+f(v_2)\geqslant 1$,$f(v_{n-1})+f(v_n)\geqslant 1$,另外,对于路 P_n 上的任意3个连续的点,它们关于函数 f 的函数值之和均不小于1。

如果 $n=2$,则定理显然成立,设 k 是一个正整数,笔者分3种情况讨论。

情况1 $n=3k$。

如果 $f(v_1)=f(v_n)=0$,则有 $n\geqslant 6$,并且 $f(v_2)=f(v_3)=f(v_{n-2})=f(v_{n-1})=1$。因为路 P_n 上的任意3个连续的点其关于函数 f 的函数值之和均不小于1,所以,有 $\gamma_p^-(P_n)=w(f)=(f(v_1)+f(v_2)+f(v_3))+\sum_{i=1}^{k-2}(f(v_{3i+1})+f(v_{3i+2})+f(v_{3i+3}))+(f(v_{n-2})+f(v_{n-1})+f(v_n))\geqslant 2+(k-2)+2=k+2$。

如果 $f(v_1)=1$ 或 $f(v_n)=1$,不失一般性,假设 $f(v_1)=1$,则有 $\gamma_p^-(P_n)=w(f)=f(v_1)+\sum_{i=1}^{k-1}(f(v_{3i-1})+f(v_{3i})+f(v_{3i+1}))+(f(v_{n-1})+f(v_n))\geqslant 1+(k-1)+1=k+1$。

因此,有 $\gamma_p^-(P_n)\geqslant k+1$。

另一方面,定义路 P_n 的函数 $g:V\to\{-1,0,1\}$ 如下。

$$g(v_j)=\begin{cases}0, & \text{如果 } j=n,\\ -1, & \text{如果 } j\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3)\text{ 且 } j\neq n,\\ 1, & \text{其他。}\end{cases}$$

显然,g 是路 P_n 的一个负对控制函数,并且重量 $w(g)=k+1$,因此,$\gamma_p^-(P_n)\leqslant k+1$,从而,有 $\gamma_p^-(P_n)=k+1=\lceil \frac{n-1}{3}\rceil+1$。

情况2 $n=3k+1$。

因为路 P_n 上的任意3个连续的点其关于函数 f 的函数值之和均不小于1,所以,有 $\gamma_p^-(P_n)=w(f)=(f(v_1)+f(v_2))+\sum_{i=1}^{k-1}(f(v_{3i})+f(v_{3i+1})+f(v_{3i+2}))+(f(v_{n-1})+f(v_n))\geqslant 1+(k-1)+1=k+1$。

另一方面,定义路 P_n 的函数 $g:V\to\{-1,0,1\}$ 如下。

$$g(v_j)=\begin{cases}0,\text{如果 } j=1,n,\\ -1,\text{如果 } j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)\text{ 且 } j\neq 1,j\neq n,\\ 1,\text{其他。}\end{cases}$$

显然,g 是路 P_n 的一个负对控制函数,并且重量 $w(g)=k+1$,因此,$\gamma_p^-(P_n)\leqslant k+1$,从而,有 $\gamma_p^-(P_n)=k+1=\lceil \frac{n-1}{3}\rceil+1$。

情况3 $n=3k+2$。

如果 $f(v_1)=0$,则 $f(v_2)=f(v_3)=1$,因为路 P_n 上的任意3个连续的点关于函数 f 的函数值之和均不小于1,所以,有 $\gamma_p^-(P_n)=w(f)=(f(v_1)+f(v_2)+f(v_3))+\sum_{i=1}^{k-1}(f(v_{3i+1})+f(v_{3i+2})+f(v_{3i+3}))+(f(v_{n-1})+f(v_n))\geqslant 2+(k-1)+1=k+2$。

如果 $f(v_1)=1$,则 $f(v_2)=1$,所以 $\gamma_p^-(P_n)=w(f)=(f(v_1)+f(v_2))+\sum_{i=1}^{k-1}(f(v_{3i})+f(v_{3i+1})+f(v_{3i+2}))\geqslant k+2$。

另一方面,定义路 P_n 的函数 $g:V\to\{-1,0,1\}$ 如下。

$$g(v_j)=\begin{cases}-1, & \text{如果 } j\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3),\\ 1, & \text{其他。}\end{cases}$$

显然,g 是路 P_n 的一个负对控制函数,并且重量 $w(g)=k+2$,因此,$\gamma_p^-(P_n)\leqslant k+2$,从而,有 $\gamma_p^-(P_n)=k+2=\lceil \frac{n-1}{3}\rceil+1$。

定理6 对于任意 $n(n\geqslant 3)$ 个顶点的圈 C_n,有

$$\gamma_p^-(C_n)=\begin{cases}\lceil \frac{n}{3}\rceil, & \text{如果 } n\equiv 0\text{ 或 }1(\mathrm{mod}\ 3),\\ \lceil \frac{n}{3}\rceil+1, & \text{如果 } n\equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)。\end{cases}$$

证明　设 $C_n = v_1v_2\cdots v_nv_1$，令函数 f 是圈 C_n 的一个最小的负对控制函数，显然，对于圈 C_n 上的任意 3 个连续的点，它们关于函数 f 的函数值之和均不小于 1，设 k 是一个正整数，笔者分 3 种情况讨论。

情况 1　$n = 3k$。

因为圈 C_n 上的任意 3 个连续的点关于函数 f 的函数值之和均不小于 1，所以，有 $r_p^-(C_n) = w(f) = \sum_{i=0}^{k-1}(f(v_{3i+1}) + f(v_{3i+2}) + f(v_{3r+3})) \geqslant k$。

另一方面，定义圈 C_n 的函数 $g: V \to \{-1,0,1\}$ 如下。

$$g(v_j) = \begin{cases} -1, 如果\ j \equiv 0(\bmod 3), \\ 1, 其他。\end{cases}$$

显然，g 是圈 C_n 的一个负对控制函数，并且重量 $w(g) = k$，因此，$\gamma_p^-(C_n) \leqslant k$，从而，有 $\gamma_p^-(C_n) = k = \lceil \frac{n}{3} \rceil$。

情况 2　$n = 3k + 1$。

不失一般性，假设 $f(v_1) = 1$，因为圈 C_n 上的任意 3 个连续的点其关于函数 f 的函数值之和均不小于 1，所以，有 $\gamma_p^-(C_n) = w(f) = f(v_1) + \sum_{i=1}^{k}(f(v_{3i-1}) + f(v_{3i}) + f(v_{3i+1})) \geqslant k + 1$。

另一方面，定义圈 C_n 的函数 $g: V \to \{-1,0,1\}$ 如下。

$$g(v_j) = \begin{cases} 0, & 如果\ j = n-1, n, \\ -1, & 如果\ j \equiv 0(\bmod 3)，且\ j \neq n-1, \\ 1, & 其他。\end{cases}$$

显然，g 是圈 C_n 的一个负对控制函数，并且重量 $w(g) = k + 1$，因此，$\gamma_p^-(C_n) \leqslant k + 1$，从而，有 $\gamma_p^-(C_n) = k + 1 = \lceil \frac{n}{3} \rceil$。

情况 3　$n = 3k + 2$。

不失一般性，假设 $f(v_1) = f(v_2) = 1$，因为圈 C_n 上的任意 3 个连续的点其关于函数 f 的函数值之和均不小于 1，所以，有 $\gamma_p^-(C_n) = w(f) = (f(v_1) + f(v_2)) + \sum_{i=1}^{k}(f(v_{3i}) + f(v_{3i+1}) + f(v_{3i+2})) \geqslant k + 2$。

另一方面，定义圈 C_n 的函数 $g: V \to \{-1,0,1\}$ 如下。

$$g(v_j) = \begin{cases} -1, 如果\ j \equiv 0(\bmod 3), \\ 1, 其他。\end{cases}$$

显然，g 是圈 C_n 的一个负对控制函数，并且重量 $w(g) = k+2$，因此，$\gamma_p^-(C_n) \leqslant k+2$，从而，有 $\gamma_p^-(C_n) = k + 2 = \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$。

参考文献:

[1] ORE O. Theory of Graphs[M]. RI: Amer Math Soc Colloq, 1962. 38.

[2] HAYNES T W, SLATER P J. Paired-domination and the paired-domatic number[J]. Congr Numer, 1995, 109: 67-72.

[3] DUNBAR J E, HEDETNIEMI S T, HENNING M A, et. al. Minus domination in regular graphs[J]. Discrete Math, 1996, 49: 311-312.

[4] XING H, SUN L. On minus paired-domination in graphs[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2003, 12(2): 202-204.

[5] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Fundamentals of Domination in Graphs[M]. New York: Marcel Dekker, 1998.