文章编号: 1008-1542(2005) 03-0177-03

一类高次多项式系统极限环的研究

封汉颍, 张飞龙

(军械工程学院基础部, 河北石家庄　050003)

摘　要: 用平面自治系统的极限环理论和分支理论, 研究了一类具有普遍意义的高次多项式系统, 并讨论了该系统极限环的存在性和唯一性, 分析了系统的分支, 同时解决了系统极限环的个数和分布问题, 应用所得结论, 推广并改进了前人的结果。

关键词: 高次多项式系统; 极限环; 分支理论; 存在性; 唯一性

中图分类号: O157. 13　　文献标识码: A

Study on limit cycles for a class of higher polynomial system

FENG Han-ying, ZHANG Fei-long

(Department of Basic Courses, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang Hebei 050003, China)

Abstract: A class of higher polynomial system is researched with the theory of limit cycles and bifurcation of the plane autonomous system. The existence and uniqueness of its limit cycles and its bifurcations are analyzed. The conclusions applied, results of predecessors are extended and improved.

Key words: higher polynomial system; limit cycles; theory of bifurcation; existence; uniqueness

1　问题的提出

1900 年, 德国数学家 D. Hilbert 根据 19 世纪数学研究的成果及发展趋势提出了新世纪数学所面临的 23 个难题。其中第 16 个问题关于“代数曲线与曲面的拓扑”的后半部分是: 给定 n 次系统 $\frac{dy}{dx}=\frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}$ (记为 (E_n)), 其中 P_n, Q_n 是次数不高于 n 的实系数多项式), 问它最多有几个极限环以及它们的相对位置如何, 即对一切这样的 n 次系统, 能否估算出它们极限环个数的最小上界。

自 20 世纪 50 年代起, 中国数学家就致力于 (E_2) 系统的研究, 并将可能出现极限环的 (E_2) 系统分为 3 类分别加以研究。目前, 经过国内外数学家的共同努力, 关于(Ⅰ) 类系统极限环个数与全局结构的问题已彻底解决, 对(Ⅱ) 类、(Ⅲ) 类系统也取得不少进展, 但对于一般的 n 次系统 (E_n) 的研究却进展甚微, 离彻底解决还有很大的距离[1]。

本文对一类具有普遍意义的高次多项式系统的极限环进行了讨论, 并彻底解决了其个数与分布问题。

2　定理及其证明

考虑多项式系统

收稿日期: 2003-11-14; 修回日期: 2004-12-12; 责任编辑: 张　军, 许克明

基金项目: 军械工程学院基金资助项目(YJJXM02009)

作者简介: 封汉颍(1961-), 男, 安徽阜阳人, 副教授, 硕士, 主要从事微分方程定性理论方面的研究。

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y(1+y)^{\alpha}+mx^{\alpha}(1+y)+lx^{\alpha+1},\\ \dfrac{dy}{dt}=x^{\alpha}(1+y+ax),\ \alpha\text{为正奇数},\end{cases}\tag{1}$$

不失一般性, 设 $a\leqslant 0$, 否则, 可通过变换 $x_1=-x, t_1=-t$ 实现。由 $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{y=-1}=ax^{\alpha+1}$ 定号, 故直线 $y=-1$ 是系统(1)的无切直线, 轨线只能从直线的一侧穿向另一侧, 于是系统(1)若存在闭轨线或奇异闭轨线 Γ, 它只能位于直线 $y=-1$ 的一侧。

作变换 $x_1=\dfrac{x}{1+y}, y_1=y, dt_1=(1+y)^{\alpha-1}dt$, 仍以 x, y, t 表示新变量, 系统(1)转化为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+(1+y)[mx^{\alpha}+(l-1)x^{\alpha+1}-ax^{\alpha+2}]=P(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=(1+y)^2(x^{\alpha}+ax^{\alpha+1})=Q(x,y)。\end{cases}\tag{2}$$

定理 1 当 $ma[1+l(\alpha+1)]\leqslant 0$ 时, 系统(2)在全平面上无极限环。

证明 取 Dulac 函数 $B(y)=(1+y)^{(\alpha-1)-l(\alpha+1)}$, 则有

$$\operatorname{div}(BP,BQ)=\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=(1+y)^{\alpha-l(\alpha+1)}[m\alpha-(1+l(\alpha+1))a^{\alpha}x^2]x^{\alpha-1},$$

由于 α 为正奇数, 所以当 $ma[1+l(\alpha+1)]\leqslant 0$ 时, $\operatorname{div}(BP,BQ)$ 在直线 $y=-1$ 两侧常号, 且不在任何子区域内恒为 0。根据 Bendixson-Dulac 判别法, 当 $ma[1+l(\alpha+1)]\leqslant 0$ 时, 系统(2)在全平面上无极限环。

为研究系统(1)的极限环, 仅需考虑 $ma[1+l(\alpha+1)]>0$ 的情况。不妨设 $l>\dfrac{-1}{\alpha+1}$ 即 $1+la+l>0$, 因已设 $a\leqslant 0$, 则 $m<0$, 否则可作变换: $x_1=-x, t_1=-t$, 从而可在 $l>\dfrac{-1}{\alpha+1}$, $a<0$, $m<0$ 的假设下进行讨论。

引理 1 系统(2)若有极限环, 它必与直线 $l_1: x=\dfrac{-m\alpha}{1+l(\alpha+1)}$ 相交。

证明 取 Dulac 函数 $B(y)=(1+y)^{\alpha}$, 则有

$$\frac{\partial}{\partial x}(BP)+\frac{\partial}{\partial y}(BQ)=(1+y)^{\alpha+1}x^{\alpha-1}[m\alpha+(1+l(\alpha+l))x]。$$

显然如果系统(2)存在极限环, 它必然要与直线 $l_1: x=\dfrac{-m\alpha}{1+l(\alpha+l)}$ 相交。

引理 2 系统(2)若有围绕原点的极限环, 它必不与直线 $l_2: x=-\dfrac{1}{a}$ 相交。

证明 假设围绕原点的极限环与直线 $x=-\dfrac{1}{a}$ 相交, 由于 $Q(x,y)=\dfrac{dy}{dt}=(1+y)^2(x^{\alpha}+ax^{\alpha+1})$, 在 y 轴左侧有 $Q(x,y)<0$, 所以极限环的绕行方向是逆时针的, 见图 1。那么当 $x>-\dfrac{1}{a}$ 时, 应有 $Q(x,y)>0$ 的情况出现, 但实际上当 $x>-\dfrac{1}{a}$ 时, 总有 $Q(x,y)<0$, 推出矛盾。故系统(2)若有围绕原点的极限环, 它必不与直线 $l_2: x=-\dfrac{1}{a}$ 相交。

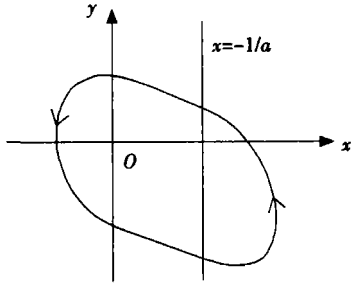

图 1 系统(2)有围绕原点极限环的情况

Fig. 1 Situation in which system (2) has a limit cycle around the origin

引理 3 系统(2)在全平面上除原点外, 只有一个奇点 $A\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{l-am}{a^{\alpha+1}+am-l}\right)$, 且当 $a^{\alpha+1}+am-l>0$ 时, A 是鞍点。

证明 由 $P(x,y)=0$ 和 $Q(x,y)=0$ 可解得系统(2)除原点外, 只有奇点 $A\left(-\dfrac{1}{a},\dfrac{l-am}{a^{\alpha+1}+am-l}\right)$, 记 A 的纵坐标为 y_0, 因为 $\Delta=(P_xQ_y-P_yQ_x)_A=-(1+y_0)^2\dfrac{am-l+a^{\alpha+1}}{a^{2\alpha}}$, 显然当 $a^{\alpha+1}+am-l>0$ 时, A 为鞍点。

定理 **2**　当 $ma \geqslant \frac{1+l(\alpha+l)}{\alpha}$ 时, 系统(2)在全平面上无极限环。

证明　由引理 1 和引理 2 可知, 系统(2)若有围绕原点的极限环, 必与直线 l_1 相交, 而不与直线 l_2 相交。所以直线 l_1 必位于 l_2 的左侧, 即有 $\frac{-m\alpha}{1+l(\alpha+1)} < -\frac{1}{a}$, 从而有 $ma < \frac{1+l(\alpha+1)}{\alpha}$, 故当 $ma \geqslant \frac{1+l(\alpha+1)}{\alpha}$ 时, 系统(2)无围绕原点的极限环。

此外, $l > \frac{-1}{\alpha+1} > -1$, 当 $ma \geqslant \frac{1+l(\alpha+1)}{\alpha}$, 从而有 $ma - l \geqslant \frac{1+l}{\alpha} > 0$ 时, 所以 $a^{\alpha+1} + am - l > 0$, 由引理 3 知 A 是鞍点, 外围无极限环。又由引理 2 知, 系统(2)没有包围原点和 A 的极限环, 故此时系统(2)在全平面上无极限环。

由上分析可知, 系统(2)若有极限环则仅可能在 O 外围, 此时必有 $0 < ma < \frac{1+l(\alpha+1)}{\alpha}$, 以下讨论均建立在这个关系上, 且极限环位于区域 $D = \left\{(x, y) \mid x < -\frac{1}{a}, y > -1\right\}$ 内。

再对系统(2)作变换:

$$x_1 = x,\ e^{-y_1} = 1+y,\ \mathrm{d}t_1 = -(1+y)\,\mathrm{d}t, \tag{3}$$

仍以 x, y, t 表示新变量, 系统(2)化为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\varphi(y) - F(x), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(x)。 \end{cases} \tag{4}$$

其中: $\varphi(y) = e^y - 1$; $F(x) = mx^{\alpha} + (l-1)x^{\alpha+1} - ax^{\alpha+2}$; $g(x) = x^{\alpha} + ax^{\alpha+1}$。记 $f(x) = F'(x) = m\alpha x^{\alpha-1} + (l-1)(\alpha+1)x^{\alpha} - a(\alpha+2)x^{\alpha+1}$, $G(x) = \int_0^x g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+2}x^{\alpha+2}$。

引理 **4**　当 $-2 < m < 0$ 时, 系统(1)的奇点 O 为稳定焦点, 而当 $m = 0$ 时, O 为不稳定焦点。

证明　令 $z = G(x)$, 当 $x \to 0$ 时, $G(x) \sim \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, 设 $x > 0$, $x < 0$ 部分的反函数分别记为 $x_1(z) > 0$, $x_2(z) < 0$, 则当 $z \to 0$ 时, $x_1(z) \sim (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}} \cdot z^{\frac{1}{\alpha+1}}$, $x_2(z) = -x_1(z)$。记 $F_i(z) = F[x_i(z)]$, $i = 1, 2$。对 $m \leqslant 0$, $a < 0$ 时, $\varphi(y)$ 和 $F_i(z)$ 满足文献[2]中推论 4 的条件。

当 $z \to 0$ 时, $F_1(z) - F_2(z) = 2m\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot z^{\frac{\alpha}{2}} - 2a\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{\alpha+2}{2}} \cdot z^{\frac{\alpha+2}{2}}$, 于是, 对 $0 < z \ll 1$, 当 $-2 < m < 0$ 时, $F_1(z) - F_2(z) < 0$; 当 $m = 0$ 时, $F_1(z) - F_2(z) > 0$。故当 $-2 < m < 0$ 时, O 为系统(4)的不稳定焦点; 当 $m = 0$ 时, O 为稳定焦点。注意到变换(3), 故有当 $m < 0$ 时, O 为系统(1)的稳定焦点; 当 $m = 0$ 时, O 为不稳定焦点。

定理 **3**　当 $0 < ma < \frac{1+l(\alpha+1)}{\alpha}$, $|m| \ll 1$ 时, 系统(1)存在包围原点的极限环。

证明　由引理 4 和 Hopf 分支定理[3]可证。

定理 **4**　当 $0 < ma < \frac{1+l(\alpha+1)}{\alpha}$ 时, 系统(1)至多存在一个围绕原点的极限环, 且若存在, 它必为不稳定环。

证明　考虑系统(4), 显然 $\varphi'(y) > 0$, $\varphi(0) = 0$, $xg(x) > 0$, 对 $x < -\frac{1}{a}$, $x \neq 0$,

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{(1+l(\alpha+1))ax^2 + m\alpha(1+2ax)}{-(x+ax^2)^2},$$

记

$$h(x) = (1+l(\alpha+1))ax^2 + m\alpha(1+2ax),$$

$h(x)$ 是开口向下的抛物线, 在点 $M\left(\frac{-m\alpha}{1+l(\alpha+1)}, \frac{(1+l(\alpha+1))m\alpha - am^2\alpha^2}{1+l(\alpha+1)}\right)$ 处取得极大值。而由于当 $0 < ma < \frac{1+l(\alpha+1)}{\alpha}$ 时, $\frac{(1+l(\alpha+1))m\alpha - am^2\alpha^2}{1+l(\alpha+1)} < 0$, 从而 $h(x) < 0$, 于是 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' > 0$。根据引理 4, 当

(下转第 **211** 页)

作为试虫。石油醚和正己烷提取液经冰箱冷冻 12 h 后有不溶物析出, 过滤得不溶物, 分别为石 A 和正 A。滤液回收溶剂后, 得石 B 和正 B。其他几种溶剂提取液回收溶剂后, 得苯 B、氯 B 和乙 B。测定各种提取物对菜青虫的生物活性, 选择出较佳溶剂。砂地柏果实不同溶剂提取物对菜青虫生物活性的比较见表 4。由表 4 可以看出: 石 A 和正 A 对菜青虫活性最高, 正 A 尤为突出, 仅在 24 h 内拒食率就接近 100%, 48 h 死亡率高达 100%; 石 A 的活性稍低于正 A, 但其拒食率和最终死亡率都达 90% 以上; 除乙 B 外, 其余几种溶剂提取物尽管都均有较高的拒食活性, 但是死亡率较低。综合考虑溶剂价格及提取效率, 笔者认为, 选择石油醚(60~ 90 ℃) 作为最佳提取溶剂是较为合理的, 据此, 确定砂地柏果实的精提方案(见 1. 2. 1) 。

表 4　砂地柏果实不同溶剂提取物对菜青虫生物活性比较

Tab. 4　Comparing the biological activity of different organic solvent extracts from sabina vulgaris fruitage against cabbage butterfly larvae

植物提取液	24 h 拒食率	48 h 拒食率	48 h 校正死亡率
石 A	91. 4	95. 2	90. 9
石 B	84. 3	89. 1	46. 0
正 A	99. 5	99. 7	100. 0
正 B	81. 9	90. 0	37. 0
苯 B	90. 5	95. 0	46. 0
氯 B	91. 2	95. 3	46. 0
乙 B	46. 0	63. 0	25. 1

样品均配制成 25. 0 g/ L 的丙酮溶液供试, 拒食率= (对照平均取食量- 处理平均取食量) / 对照平均取食量 × 100%, 取食量以菜青虫对青菜的取食质量计

3　结　论

通过对 10 种植物提取物的抑菌试验, 初步筛选出 7 种植物作为潜在的 Bt 菌混剂候选复配植物, 通过提取液对鱼虫的杀虫活性试验, 筛选出了闹羊花、藜芦和砂地柏 3 种较好的候选植物。对最具开发价值的植物砂地柏进行了不同有机溶剂提取物的杀虫活性比较实验, 确定石油醚为最佳提取溶剂。

参考文献:

[1]　罗　敏, 林永贤, 杨玉旺, 等. 生物农药——21 世纪农药的生力军[J]. 河北工业科技, 2003, 20(5) : 54-59.
[2]　张　舒. 植物源杀虫剂的开发研究综述[J] . 湖北农业科学, 2001, (4) : 53-55.
[3]　操海群, 岳永德, 花日茂, 等. 植物源农药研究进展[J] . 安徽农业大学学报, 2000, 27(1) : 40-44.
[4]　马志卿, 张　兴. 植物源杀虫物质的作用特点[J] . 植物保护, 2000, 26(2) : 37-39.
[5]　张　兴, 冯俊涛, 陈安良, 等. 砂地柏杀虫作用研究概况[J] . 西北农林科技大学学报(自然科学版) , 2002, 30(4) : 130-134.
[6]　钟国华, 刘金香, 官　珊, 等. 闹羊花素类化合物对斜纹蛾幼虫表皮成分的影响与构效关系[J] . 昆虫学报, 2004, 47(6) , 705-714.
[7]　杨丽娟. 几种有毒植物提取液对落叶松鞘蛾幼虫的毒杀作用[J] . 通化师范学院学报, 2004, 25(2) : 80-83.

(上接第 **179** 页)

$m<0$ 时, 原点 O 为稳定焦点。注意到变换(3) , 由张芷芬唯一性定理[4] 知, 系统(1) 在原点外围至多存在一个极限环, 且若存在, 它一定是不稳定的。

注: 令 $l=1$, 系统(1) 变为文献[5] 研究的系统, 不过这里的证明比文献[5] 更简洁; 令 $l=1$, $\alpha=1$, 系统(1) 即为文献[6] 研究的系统, 这里还解决了文献[6] 中未涉及到的极限环存在性问题。

参考文献:

[1]　叶彦谦. 极限环论[M] . 第 2 版. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.
[2]　韩茂安. 平面定常系统有无闭轨的判别法[J] . 南京大学学报, 1985, 21(2) : 233-244.
[3]　张锦炎. 常微分方程几何理论与分支问题[M] . 修订再版. 北京: 北京大学出版社, 1987. 189-190.
[4]　张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M] . 北京: 科学出版社, 1985.
[5]　刘德明. 一多项式系统的极限环[J] . 辽宁师范大学学报, 1999, 22(3) : 203-207.
[6]　邹　应. 方程 $dx/dt=-y+dx+bx^2+bdxy-by^2$, $dy/dt=x(1+ax+y)$ 的极限环讨论[J] . 武汉大学学报, 1977, (4) : 7-9.