

文章编号: 1008-1542(2005)02-0133-05

微分容积法分析复合材料椭圆板的自由振动

宋振水¹, 周敏娟²

(1. 石家庄铁道学院校办工厂, 河北石家庄 050043; 2. 石家庄铁路工程职业技术学院学生处, 河北石家庄 050041)

摘要: 研究用一种高效率高精度的数值方法——微分容积法求解周边固支的反对称角铺设层叠复合材料椭圆板的自由振动, 基于经典的薄板理论, 首先建立了问题的控制微分方程和相应的边界条件, 然后利用微分容积法将控制方程和边界条件转化为一组用域内配点位移表示的线性齐次代数方程, 这是经典的线性特征值问题, 利用子空间迭代法就可求出振动的固有频率因子, 并通过数值算例, 展示了方法的收敛性、简单性和有效性, 经与已有的数值结果比较发现, 本文结果具有很好的精度。

关键词: 自由振动固有频率; 角铺设层叠板; 椭圆板; 微分容积法

中图分类号: O624.4 **文献标识码:** A

Differential cubature method for free vibration analysis of clamped anti-symmetrically laminated elliptical plates

SONG Zhen-shui¹, ZHOU Min-juan²

(1. School Factory, Shijiazhuang Railway Institute, Shijiazhuang Hebei 050043, China; 3. Student Department, Shijiazhuang Vocational Institute of Railway Engineering, Shijiazhuang Hebei 050041, China)

Abstract: This paper discusses a free vibration study of clamped anti-symmetrically laminated elliptical plates by using a highly efficient and accurate global numerical method: the differential cubature method. The governing differential equations and boundary condition equations are firstly established based on the classical plate theory. Then these equations are transformed into a set of linear homogeneous algebraic equations regarding the displacements of discreted points in the physical domain, by using the differential cubature procedure. This is a typical eigenvalue problem, of which the eigenvalues and eigenvectors can be calculated numerically. The subspace iterative method is used to search for the dimensionless frequency parameters. The applicability, efficiency, and simplicity of this method are demonstrated through some examples of plate vibration solution. The numerical accuracy is verified by studying the convergence characteristics of plate vibration frequencies and, when possible, by comparing the numerical solutions with existing literature.

Key words: free vibration natural frequency; laminate plate; elliptical plate; differential cubature method

由于复合材料层合板在常规的土木工程、机械工程以及高科技领域的航空航天工程中都有广泛的应用, 故对其自由振动问题的研究已很多。关于层合板自由振动特性的解析解和数值解已经非常多, 如 BERT 和 MAYBERRY 用 Rayleigh-Ritz 能量法求解了各向异性矩形层合板的振动频率^[1]; JONES 对 4 边简支的非对称正交铺设矩形板给出了精确解析解和数值解^[2]; REDDY 等给出了反对称角铺设层合板自由振动的有限元分析^[3], 文中考虑了板的剪切变形; LIN 和 KING 计算了非对称正交铺设和反对称角铺设层合板的固

收稿日期: 2005-03-04; 责任编辑: 冯 民

作者简介: 宋振水(1958), 男, 河北高碑店人, 工程师, 主要从事结构力学方面的研究。

有频率^[4]; 基于 Levy 一般解, KHDEIR 给出了反对称角铺设层合板自由振动的解析解^[5]; SIVA KUMARAN 对周边自由的层合复合材料圆板和环形板给出了自由振动的分析^[6]。

在前面所述的文献中, 大多是处理矩形板问题的, 而关于其他复杂形状如椭圆板、菱形板的研究则很少。最近, CIVAN 发展了一种新型的数值方法——微分容积法^[7], 旨在高效地求解多维微分方程, 这是一种基于多项式展开的直接将控制方程离散的方法, 它将任意一个线性算子对未知函数的作用量在域内某点处的值用问题域内所有配点处的函数值的线性组合来表示, 如此便将微分方程化作一组线性代数方程。由于该方法的配点在域内的设置是随意的, 故它可以用于求解具有复杂几何域的线性边值问题。新加坡学者 LIEW 和 LIU 曾用该方法求解过具有任意形状和任意边界条件的薄、厚板的弯曲问题^[8,9], 其数值结果具有很好的收敛性和精度。武兰河将该方法首先引入特征值问题, 尝试求解了各种形状中厚板的自由振动和屈曲问题, 并同样取得了不错的结果^[10]。本文是在这一领域的进一步研究, 用这种新型的数值方法求解反对称角铺设层叠复合材料椭圆板的自由振动。

1 微分容积法

微分容积法本质上是一种数值近似方法, 它是将任意一个线性微分算子, 诸如一个连续函数或其任意阶偏导数或它们的线性组合, 在各离散点处的值用全域内各点函数值的加权线性迭加。对一个二维问题, 设在求解域内任意布置 n 个离散点, 在第 i 点处有

$$\mathcal{A}f(x, y)\}_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}f(x_j, y_j), \tag{1}$$

其中: \mathcal{A} 表示任意一个线性微分算子; $f(x, y)$ 为待求的未知函数; C_{ij} 为加权求积的权系数。由参考文献[6]可知, C_{ij} 可由下式求得

$$\mathcal{A}x^{\alpha-\beta}y^{\beta}\}_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}(x_j^{\alpha-\beta}y_j^{\beta}) \quad (\beta = 0, 1, 2, \dots, \alpha; \alpha = 0, 1, 2, \dots, k-1), \tag{2}$$

选择 n 个单项式 $x^{\alpha-\beta}y^{\beta}$ 作为试验函数, 当已知各离散点的坐标后, 这些权系数便可通过方程组(2)得到。

2 控制方程和边界条件

根据经典的薄板理论, 反对称角铺设层合板自由振动的控制微分方程为

$$\left[A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \left[3B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] w = 0, \tag{3a}$$

$$(A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] v - \left[B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] w = 0, \tag{3b}$$

$$- \left[3B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] u - \left[B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right] v + \left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right] w = \rho h \omega^2 w, \tag{3c}$$

其中: A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 为板的拉伸刚度、耦合刚度和弯曲刚度; u, v 分别为 x 和 y 方向的面内位移; w 为横向挠度; ρ 和 h 为板的密度和厚度; ω 为振动的角频率。

如果周边固定, 则四周的边界条件为

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial N} = 0, \tag{4a-4d}$$

其中 N 为边界的法线方向。将 w 对 N 的导数转化为 w 对 x 和 y 的导数, 边界条件可写为

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{5a-5d}$$

其中 N_x 和 N_y 为边界外法线单位向量在 x 轴和 y 轴上的投影。

3 基本方程的离散

为将控制方程和边界条件离散, 首先定义以下线性微分算子

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \mathcal{R} = (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \mathcal{R} = - \left(3B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right), \\ \mathcal{R} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \mathcal{R} = - \left(B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3B_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right), \\ \mathcal{R} &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}, \mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial x}, \mathcal{R} = \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \tag{6a- 6h}$$

利用微分容积法的步骤, 方程(3)可以离散成为如下形式

$$\sum_{j=1}^n C_{ij}^{(1)} u_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(2)} v_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(3)} w_j = 0, \tag{7a}$$

$$\sum_{j=1}^n C_{ij}^{(2)} u_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(4)} v_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(5)} w_j = 0, \tag{7b}$$

$$\sum_{j=1}^n C_{ij}^{(6)} u_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(3)} v_j + \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(5)} w_j - \Omega^2 w_i = 0, \tag{7c}$$

其中: n 为域内总配点数; i 为配点序号, $i = 1, 2, \dots, n$; $C_{ij}^{(m)}$ 为与算子 \mathcal{R} 相对应的求积系数, $m = 1, 2, \dots, 8$ 。

相应地, 边界条件式(5a- 5d)也可化为

$$u_i = 0, v_i = 0, w_i = 0, N_x \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(7)} w_j + N_y \sum_{j=1}^n C_{ij}^{(8)} w_j = 0, \tag{8a- 8d}$$

其中 i 为边界上的配点序号。整个椭圆板的配点格式见图 1。

4 数值结果及讨论

将域内各配点处离散后的控制方程组写在一起并写成矩阵形式, 有

$$[K] - \Omega^2 [M] \{q\} = 0, \tag{9}$$

式中: $[K]$ 和 $[M]$ 分别为刚度矩阵和质量矩阵, 其中的元素由方程(7)确定; $\{q\}$ 为结点位移列阵

$$\{q\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \dots \ u_n \ v_n \ w_n\}^T. \tag{10}$$

需要注意的是, 在每个边界点上, 宜用相应的边界离散方程来代替原来的控制方程。注意到每个点处的控制方程有 3 个, 而每个边界点处的约束方程有 4 个, 所以当用边界约束方程取代控制方程时, 就会出现方程个数大于结点位移总数的现象, 亦即会出现所谓矛盾方程。为很好地解决一点处多约束的问题, 则需要引入一个 δ 网格, 也就是说用距离很小的 2 个点描述一个点处的边界条件, 在其中的一个点利用方程(8a- 8c), 而在另一个点上采用方程(7a, 7b)和(8d)。

方程(9)是一典型的特征值问题, 用现有的特征问题求解器便可求出其特征值和特征向量。下面举一些数值算例来展示本文方法的收敛性和计算精度。为了便于描述数值结果并进行比较, 定义如下的无量纲频率因子

$$\lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_0}, \tag{11}$$

式中: D_0 和 a 分别为板的弯曲刚度和特征长度; $D_0 = E_1 h^3 / [12(1 - \nu_1 \nu_2)]$; E_1 为纤维主方向的弹性模量。

首先看一个周边固定的各向同性椭圆板的算例, 其前 4 阶频率因子 λ 随配点数目增加而收敛的情况见表 1, 其中 b 为板的特征宽度, 为便于比较, 表中亦给出了其他文献的数值结果。由表 1 可以看出: 1) 无论板的长宽比多大, 各向同性板的前 4 阶频率因子都能随着配点数目的增加而稳定收敛, 收敛方式呈振荡形式; 2) 本文结果与曹志远的解析解^[11]、HOSOKAWA 的 Green 函数伽辽金解^[12]和 LIEW 的以多项式为试函数的能量解^[13]相比较, 都有很好的吻合度; 3) 对高阶模态而言, 频率因子的收敛性要比低阶频率差一些, 当用同样多的配点时, 高阶频率比低阶频率的精度稍差; 4) 要得到具有高精度的数值解, 对大多数情况而言, 配点总数应在 113 以上。

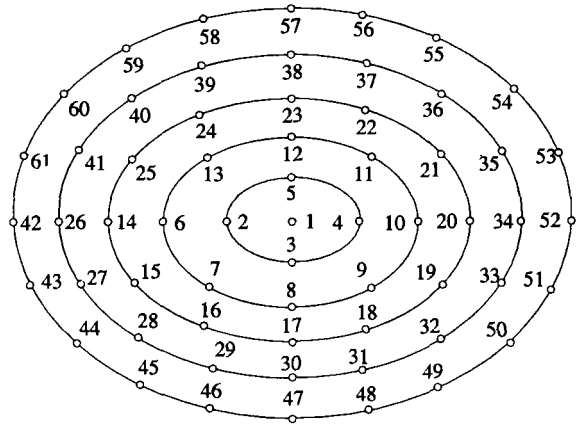


图 1 椭圆板的配点格式

Fig. 1 Grid point pattern of elliptical plate

其次,看一个4层反对称角铺设[30°/-30°/30°/-30°]固定圆板的例子,材料常数为 $E_1=138\text{ GPa}$, $E_2=8.96\text{ GPa}$, $G_{12}=7.1\text{ GPa}$, $\nu_2=0.3$ 。表2为该板的前4阶频率因子随配点数增加而收敛的情况,可以看出,其收敛情况与各向同性板的情况类似,随着配点数的增加,各阶频率因子都能稳定收敛到确定值,且收敛性仍呈现出振荡状。本文结果亦与HOSOKAWA的Green函数解^[12]进行了比较,容易看出,本文结果与HOSOKAWA的结果吻合非常好,当采用145个配点时,本文结果与文献[12]结果的最大相对误差仅有0.8%,这进一步确立了本文方法的有效性。

最后,给出用本文方法计算出的具有反对称铺层的周边固支叠椭圆板的前4阶频率因子,板的材料与上例相同,铺层方式也与前面相同,该板在具有不同长宽比时的频率因子见表3。由表3可见,随着板的长宽比增大,各阶频率因子都在降低。这个算例的计算结果也与文献[14]中的能量法结果作了比较,发现本文结果略大于文献[14]的计算结果。一般说来,能量法结果是偏大的,但笔者等注意到文献[14]的结果是用高阶理论计算出来的,这对反对称角铺层板来说,剪切变形的影响很大。而本文是利用的经典理论,忽略了剪切变形带来的影响,导致计算结果高于文献[14],故本文结果仍是合理的。

5 结论

本文用微分容积法成功地求解了具有椭圆形几何域和固定边界条件的反对称角铺设层合板的自由振动。文中给出了详细的数学公式,并用数值算例展示了本文方法的可行性和简单性,通过收敛性研究和数值精度比较证明了方法的有效性。算例表明:微分容积法求解复合材料椭圆板的自由振动非常有效,得到的结果具有较高的数值精度,与其他方法给出的数值结果吻合很好。

参考文献:

[1] BERT C W, MAYBERRY B L. Free vibrations of un-symmetrically laminated an-isotropic plates with clamped edges [J]. Journal of Composite Materials, 1969, 3(2): 282-292.

[2] JONES R M. Buckling and vibration of un-symmetrically laminated cross-ply rectangular plates [J]. AIAA Journal, 1973, 11(3): 1 626-1 632.

[3] REDDY J N. Free vibration of anti-symmetric angle-ply laminated plates including transverse shear deformation by the finite element method [J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 66(4): 565-576.

表1 各向同性固定椭圆板固有频率因子的收敛情况和精度比较

Tab.1 Convergence and comparison studies of frequency parameters of a clamped isotropic elliptical plate

b/a	n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
1.0	41	10.577	22.838	22.863	36.469
1.0	61	10.292	21.817	21.681	35.172
1.0	85	10.357	22.464	21.944	35.437
1.0	113	10.234	21.360	21.405	34.935
1.0	145	10.322	21.537	21.557	35.091
1.0	181	10.226	21.275	21.268	34.887
文献[12]	-	10.216	21.261	21.261	34.880
文献[11]	-	10.214	-	-	-
文献[13]	-	10.250	21.326	21.326	34.974
2.0	41	28.651	41.135	57.378	72.297
2.0	61	27.520	40.245	56.340	71.155
2.0	85	28.133	40.412	56.527	71.296
2.0	113	27.391	39.729	56.301	70.438
2.0	145	27.490	39.847	56.328	70.495
2.0	181	27.385	39.635	56.213	70.384
文献[12]	-	27.378	39.498	55.979	69.860
文献[11]	-	27.752	-	-	-

表2 反对称层合圆板的频率因子 λ 收敛情况和数值精度比较([30°/-30°/30°/-30°])

Tab.2 Convergence and comparison studies of frequency parameters of an anti-symmetrically laminated circular plate ([30°/-30°/30°/-30°])

n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
41	6.269 4	11.759 0	14.824 5	17.315 6
61	6.276 5	11.542 1	14.874 1	17.269 1
85	6.245 2	11.483 2	14.778 2	17.250 3
113	6.252 1	11.494 7	14.782 6	17.237 3
145	6.249 3	11.140 9	14.767 7	17.237 5
181	6.249 2	11.141 0	14.767 2	17.237 4
文献[12]	6.248 9	11.080 0	14.650 0	17.199 0

表3 反对称角铺设层叠椭圆板的前4阶频率因子比较([30°/-30°/30°/-30°])

Tab.3 Comparison studies of the first four frequency parameters of an anti-symmetrically laminated elliptical plate ([30°/-30°/30°/-30°])

b/a	λ_1		λ_2		λ_3		λ_4	
	本文解	文献 [14]	本文解	文献 [14]	本文解	文献 [14]	本文解	文献 [14]
1.0	6.244 8	6.237	10.988	10.968	14.682	14.325	17.230	17.169
1.2	4.931 2	4.905	9.539 3	9.533	10.892	10.841	15.246	15.144
1.5	3.867 3	3.851	7.905 4	7.901	8.293	8.264	12.584	12.556
2.0	3.119 5	3.112	5.542 0	5.541	7.305	7.298	8.613	8.609
2.5	2.779 2	2.768	4.451 7	4.449	6.562	6.551	6.846	6.843
3.0	2.598 1	2.594	3.855 8	3.848	5.411	5.411	6.582	6.581
4.0	2.415 8	2.413	3.246 2	3.245	4.238	4.237	5.404	5.404

- [4] LIN C C, KING W W. Free transverse vibrations of rectangular un-symmetrically laminated plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 1974, 36(1): 91-103.
- [5] KHDEIR A A. Free vibration of anti-symmetric angle-ply laminated plates including various boundary conditions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 122(3): 377-388.
- [6] SIVAKU MARAN K S. Free vibration of annular and circular symmetric composite laminates[J]. Journal of Composite Structures, 1989, 11(2): 205-226.
- [7] CIVAN F. Solving multivariable mathematical models by the quadrature and cubature methods[J]. Numerical Method for Partial Differential Equations, 1994, 10(4): 545-567.
- [8] LIEW K M, LIU F L. Differential cubature method: a solution technique for Kirchhoff plates of arbitrary shape[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 13(1): 73-81.
- [9] LIU F L, LIEW K M. Differential cubature method for static solutions of arbitrary shaped thick plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(28/29): 3655-3674.
- [10] 武兰河, 赵永茂, 李延强. 求解任意形状厚板自由振动的微分容积法[J]. 应用力学学报, 2003, 20(1): 149-153.
- [11] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989: 32-68.
- [12] HOSOKAWA K, YAMADA Y, SAKATA T. Free vibration analysis of clamped anti-symmetrically laminated elliptical plates[J]. ASME J Appl Mech, 1998, 65(4): 341-345.
- [13] LIEW K M, YANG B. Three dimensional elasticity solutions for free vibrations of circular plates: a polynomial-Ritz analysis[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1999, 175(2): 189-201.
- [14] 武兰河, 吴松. 复合材料椭圆板的固有频率[J]. 工程力学, 2001, 18(2): 82-91.

(上接第 113 页)

锰矿的代表性样品的吸附 pH 曲线和吸附等温线见图 8 和图 9。由图可知, 吸附 pH 曲线呈“反 S”型, 在 $\text{pH} < 2.4$ 时对甲基橙有很强的吸附去除能力^[5~8], $\text{pH} > 2.4$ 时去除率陡直地下降; 吸附等温线与 Langmuir 型吸附等温线相吻合, 按线性 Langmuir 等温吸附式进行拟合处理, 可求得每克锰矿中甲基橙的饱和吸附量为 776.5 mg。

3 结 论

本文的研究表明, 利用硫酸的浸溶作用, 水合肼在酸性介质中对天然锰矿的还原微溶作用以及高锰酸钾的氧化沉积作用, 可以有效地提高天然锰矿的界面吸附能力, 在试验条件下对甲基橙的去除率可由 55.8% 提高到 96%, 20℃下每克锰矿的甲基橙的 Langmuir 饱和吸附量可达 776.5 mg, 为探讨在污染治理和环境修复方面更好地利用天然锰矿提供了一种较好的方法和途径。

参考文献:

- [1] 鲁安怀. 环境矿物材料在土壤、水体、大气污染治理中的利用研究[J]. 岩石矿物学杂志, 1999, 18(4): 292-300.
- [2] HEALY T W, HERRING A P, FUERSTENAU D W. The effect structure on the surface properties of a manganese dioxides[J]. J Colloid Interface Sci, 1966, 21: 435-444.
- [3] 刘瑞, 秦善, 鲁安怀, 等. 锰氧化物和氢氧化物中的孔道结构矿物及其环境属性[J]. 矿物岩石, 2003, 23(4): 28-33.
- [4] STONE A T, MORGAN J J. Reduction and dissolution of manganese () and manganese () oxides by organics: reaction with hydroquinone[J]. Environ Sci Technol, 1984, 18: 450-456.
- [5] Jiantuan Ge, Jiuhui Qu. Ultrasonic irradiation enhanced degradation of azo dye on MnO_2 [J]. Applied Catalysis B: Environmental, 2004, 47: 133-140.
- [6] 郑红, 汤鸿霄. 天然矿物锰矿砂对苯酚的界面吸附与降解研究[J]. 环境科学学报, 1999, 19(6): 67-69.
- [7] 李家珍. 染料、染色工业废水处理[M]. 北京: 化学工业出版社, 1999. 1-6, 33-34.
- [8] 马子川, 蒋兰宏, 霍庆, 等. 新生 MnO_2 对甲基橙废水的脱色特性研究[J]. 城市环境与城市生态, 2001, 14(5): 23-24.

出精品, 创名牌, 不断提高办刊效益!