

# 基于故障诊断观测器的非线性时滞时变 奇异系统的容错控制

范乔乔,石学涛,苏连青

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

**摘 要:**为了解决控制理论中的系统安全性与可靠性问题,考虑到时滞时变普遍存在于此类系统

统的容错控制问题进行研究,构造了一种新型的故障诊断观测器,结合 Lyapunov 稳定性理论研究了故障诊断观测器的状态估计误差,构建了状态反馈的容错控制器,利用 Schur 补引理以及一些基本的控制理论得到了故障诊断观测器和容错控制器存在的线性矩阵不等式(LMI)的充分条件,确定了闭环系统的稳定并且符合所给定的性能指标。通过 Matlab 仿真实例验证了所提方法的简便性以及实用性。此方法很好地克服了系统中存在的非线性、扰动以及时滞时变问题。

**关键词:**稳定性理论;故障诊断观测器;非线性;时滞时变;奇异系统;容错控制;线性矩阵不等式

**Keywords:** theory stability; fault diagnosis; nonlinear systems; time-varying delay; singular system; fault-tolerant control; linear matrix inequality

科...基...的...方...法...公...司...要...求...其...控...制...系...统...具...有...越...来...越...高...的...可...靠...性...与...安...全...性...因...此...系...统...的...故...障...诊...断...与...容...错...控...制...已...成...为...被...关...注...的...一...个...热...点<sup>[1-9]</sup>, 近年来, 奇异系统在电力、经济等系统中已经得到了广泛的应用<sup>[10-12]</sup>。如:以线性矩阵不等式(LMI)为基础的奇异系统的鲁棒稳定性控制<sup>[11]</sup>, 时滞离散奇异系统带有不确定项的鲁棒控制<sup>[12]</sup>等, 其中, 得到学者最多关注的是非线性奇异系统的研究。

通过构造广义 Sylvester 方程的参数, 文献[13]中关于非线性奇异系统得到构建观测器的充分条件。但所设计观测器的适用范围在文献[13]中仅是定值故障, 故文献[14]给出了一个非线性奇异系统, 并在此基础上构建了一种新的故障诊断观测器, 其克服了系统中的定值故障问题以及存在的非线性扰动干扰项问题; 针对广义时变系统, 以 LMI 为基础, 结合 Lyapunov 理论、Schur 补引理和 Riccati 方程等, 文献[15]关于广义时变系统进行了探索和讨论; 文献[16]关于鲁棒  $H_\infty$  保性能控制问题针对非线性不确定时滞切换奇异系统进行了深入研究。已经获得有关大量的保性能控制问题的科研成果<sup>[17-20]</sup>。

虽然目前各行各业关于非线性奇异系统容错控制问题的研究成果已成功地应用于各行各业, 但值得关注的这些系统要么缺乏故障观测器的非线性描述, 要么时滞时变项在观测器中体现不明显, 这些均具有较强的局限性, 因而, 如何构建具有扰动干扰项以及时滞时变项的非线性时滞时变奇异系统的容错控制, 是一个有理论和实用价值的一个新的研究方向。

本文以故障诊断观测器为基础, 讨论了关于非线性时滞时变奇异系统的容错控制问题。首先, 描述非线性时滞时变奇异系统, 设计新式的故障诊断观测器, 继而研究所构造的故障诊断观测器的状态估计误差, 运

## 2 故障观测器及容错控制器

### 2.1 故障检测观测器设计

为了检查和推测故障,构造下面故障检测观测器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{S}}(t) = \mathbf{TA}\hat{x}(t) + \mathbf{TA}_d\hat{x}(t-d(t)) + \mathbf{T}B\mathbf{u}(t) + \mathbf{T}g(\hat{x}(t)) + \\ \quad \mathbf{T}F\hat{f}(t) + \mathbf{T}D_1\omega(t) - \mathbf{L}(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \hat{x}(t) = \zeta(t) + \mathbf{N}C\mathbf{x}(t), \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\hat{x}(t) + \mathbf{D}_2\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\psi}(t), t \in [-\xi, 0], \xi = \max[h, d], \end{cases} \quad (2)$$

其中,  $\zeta(t) \in \mathbf{R}^n$  表示中间变量,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$  是输入,  $\hat{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  是状态估计向量,  $\hat{y}(t) \in \mathbf{R}^p$  表达系统的输出估计向量,  $\hat{f}(t) \in \mathbf{R}^r$  表示系统的执行器故障估计向量,  $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^{n \times m}$  和  $\mathbf{L} \in \mathbf{R}^{n \times m}$  是待设计的参数矩阵。且令式(2)中的矩阵  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  满足:

$$\mathbf{T}\mathbf{E} + \mathbf{N}\mathbf{C} = \mathbf{I}_n,$$

这里,  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  可由下式确定,

$$[\mathbf{T} \ \mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} + \mathbf{Z} \left[ \mathbf{I}_{n+m} - \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} \right]$$

其中,  $\mathbf{Z} \in \mathbf{R}^{n \times (n+m)}$  是任意矩阵,代表设计自由度。

令  $\mathbf{e}_x(t) = \hat{x}(t) - \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{e}_y(t) = \hat{y}(t) - y(t)$ ,  $\mathbf{e}_g(t) = \hat{g}(t) - g(t)$ ,  $\mathbf{e}_f(t) = \hat{f}(t) - f(t)$  分别为状态误差, 输出误差, 时变非线性扰动误差, 故障误差, 根据系统式(1)和观测器(2)可以计算得误差动态系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_x(t) = (\mathbf{TA} - \mathbf{LC})\mathbf{e}_x + \mathbf{TA}_d\mathbf{e}_x(t-d(t)) + \mathbf{T}\mathbf{e}_g(t) + \mathbf{T}\mathbf{F}\mathbf{e}_f(t), \\ \mathbf{e}_y(t) = \mathbf{C}\mathbf{e}_x(t). \end{cases} \quad (3)$$

注 1:对于系统(1),如果系统没有发生故障,即  $f(t) = \mathbf{0}$ 。结合系统(3)可知  $\|\mathbf{e}_y(t)\| = \|\mathbf{C}\mathbf{e}_x(t)\|$ , 则表示在  $t$  时刻系统没有故障发生,即  $f(t) = \mathbf{0}$ 。

相应的结果如下。

**定理 1** 根据系统(1),若有矩阵  $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是对称正定矩阵和标量  $\epsilon > 0$ ,符合如下不等式(4),那么存在一个形如(2)的故障诊断观测器适合系统(1),并且使故障估计误差系统(3)鲁棒稳定,而且故障诊断观测器的参数矩阵  $\mathbf{L} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}$ ,其中:

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_2 & \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{A}_d & \mathbf{P}\mathbf{T} \\ * & -(1-\tau)\mathbf{Q} & 0 \\ * & * & -\epsilon\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_2 = (\mathbf{TA})^{\mathbf{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{A} - \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y}^{\mathbf{T}} - \mathbf{Y}\mathbf{C} + \mathbf{Q} + \epsilon\mathbf{I}.$$

**证明** 选取如下形式的 Lyapunov 函数,  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_1(t) + \mathbf{V}_2(t) = \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{e}_x(t) + \int_{t-d(t)}^t \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(s)\mathbf{Q}\mathbf{e}_x(s)ds$ ,

其中  $\mathbf{Q}$  为正定的对称矩阵,沿着系统式(3)对 Lyapunov 泛函  $\mathbf{V}_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,取其时间的导数,可得:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_1(t) &= \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)((\mathbf{TA} - \mathbf{LC})^{\mathbf{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{TA} - \mathbf{LC}))\mathbf{e}_x(t) + \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{A}_d\mathbf{e}_x(t-d(t)) + \\ &\quad \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t-d(t))(\mathbf{T}\mathbf{A}_d)^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}_x(t) + \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{e}_g(t) + \mathbf{e}_g^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}_x(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_2(t) &= \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{Q}\mathbf{e}_x(t) - (1-d(t))\mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t-d(t))\mathbf{Q}\mathbf{e}_x(t-d(t)) \leq \\ &\quad \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{Q}\mathbf{e}_x(t) - (1-\tau)\mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t-d(t))\mathbf{Q}\mathbf{e}_x(t-d(t)). \end{aligned}$$

根据引理 2 可以知道:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_1(t) &\leq \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)((\mathbf{TA} - \mathbf{LC})^{\mathbf{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{TA} - \mathbf{LC}))\mathbf{e}_x(t) + \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{A}_d\mathbf{e}_x(t-d(t)) + \\ &\quad \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t-d(t))(\mathbf{T}\mathbf{A}_d)^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}_x(t) + \epsilon^{-1}\mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}_g(t) + \epsilon\mathbf{e}_g^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{e}_g(t) \leq \\ &\quad \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)((\mathbf{TA} - \mathbf{LC})^{\mathbf{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{TA} - \mathbf{LC}))\epsilon^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}_x(t) + \epsilon\mathbf{e}_g^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{e}_g(t) + \\ &\quad \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{A}_d\mathbf{e}_x(t-d(t)) + \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t-d(t)) + \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t-d(t))(\mathbf{T}\mathbf{A}_d)^{\mathbf{T}}\mathbf{P}\mathbf{e}_x(t), \end{aligned}$$

由于  $\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_2(t))\| \leq \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|$ , 所以  $\mathbf{e}_g^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{e}_g(t) \leq \mathbf{e}_x^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{e}_x(t)$ 。

即

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) \leq & e_x^T(t) ((TA-LC)^T P + P(TA-LC) + \epsilon^{-1} PPT^T P) e_x(t) + \epsilon e_x^T(t) e_x(t) + e_x^T(x) Q e_x(t) + \\ & e_x^T(t) PTA_d e_x(t-d(t)) + e_x^T(t-d(t)) (TA_d)^T P e_x(t) - (1-\tau) e_x^T(t-d(t)) Q e_x(t-d(t)) \leq \\ & e_x^T(t) ((TA-LC)^T P + P(TA-LC) + \epsilon^{-1} PPT^T P + Q + \epsilon I) e_x(t) + e_x^T(t) PTA_d e_x(t-d(t)) + \\ & e_x^T(t-d(t)) (TA_d)^T P e_x(t) - (1-\tau) e_x^T(t-d(t)) Q e_x(t-d(t)) = \\ & \omega(t)^T \Pi \omega(t). \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [e_x^T(t) \quad e_x^T(t-d(t))]^T, \\ \Pi &= \begin{bmatrix} \Theta_1 & PTA_d \\ * & -(1-\tau)Q \end{bmatrix}, \\ \Theta_1 &= (TA-LC)^T P + P(TA-LC) + \epsilon^{-1} PPT^T P + Q + \epsilon I. \end{aligned}$$

令  $Y=PL$ , 利用 Schur 补引理, 则条件(4) 相当于  $\Pi < 0$ 。根据以上大量计算, 可得  $\dot{V}(t) < 0$ , 因此系统(3)是鲁棒稳定。

注 2: 通过适当的  $T$  和  $N$  的选取, 求解得出故障诊断观测器的参数矩阵  $L$ 。求 LMI(4), 得到矩阵  $P, Q$ , 以及  $L=P^{-1}Y$ 。

### 2.2 设计容错控制器

根据系统(1), 构造如下方式的反馈容错控制器:

$$u(t) = Kx(t), \tag{5}$$

其中:  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  表示状态向量; 矩阵  $K \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是待确定的容错控制器的参数。结合式(1)和式(5), 可得到如下闭环系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + A_d x(t-d(t)) + D_1 \omega(t) + g(x(t)) + Ff(t), \\ y(t) = Cx(t) + D_2 u(t), \\ x(t) = \psi(t), t \in [-\xi, 0], \xi = \max[h, d]. \end{cases} \tag{6}$$

现在, 给出如下结果。

**定理 2** 针对确定的标量  $\gamma > 0$  和  $\epsilon > 0$ , 假若有矩阵  $H \in \mathbf{R}^n$  表示非奇异可逆和矩阵  $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}, K \in \mathbf{R}^{n \times n}$  表示对称正定, 满足下列不等式:

$$\begin{aligned} E^T H = H^T E \geq & 0, \tag{7} \\ \Omega_1 = \begin{bmatrix} E_2 & H^T A_d & H^T D_1 & H^T & H^T F \\ * & -(1-\tau)Q & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\epsilon_1 I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\epsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & -\epsilon_3 I \end{bmatrix} < & 0, \tag{8} \end{aligned}$$

其中,  $E_2 = (A + BK)^T H + H^T (A + BK) + Q + \epsilon_2 I + \epsilon_3 \lambda I$ 。那么基于故障诊断观测器的状态反馈容错控制器使闭环系统(6) 状态鲁棒稳定, 并且满足  $\|y(t)\|_\infty \leq \gamma \|\omega(t)\|_\infty$ 。

**证明** 选取如下形式的 Lyapunov 函数:  $V(t) = V_1(t) + V_2(t) = x^T(t) E^T H x(t) + \int_{t-d(t)}^t x^T(s) Q x(s) ds$ 。

针对闭环系统(6)对 Lyapunov 泛函  $V_i(t), i=1, 2$ , 取它时间的导数, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= x^T(t) ((A + BK)^T H + H^T (A + BK)) x(t) + x^T(t) H^T A_d x(t-d(t)) + \\ & x^T(t-d(t)) A_d^T H x(t) + x^T(t) H^T D_1 \omega(t) + \omega^T(t) D_1^T H x(t) + g^T(x(t)) H x(t) + \\ & x^T(t) H^T g(x(t)) + f^T(t) F^T H x(t) + x^T(t) H^T F f(t), \\ \dot{V}_2(t) &= x^T(t) Q x(t) - (1-\dot{d}(t)) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)) \leq \\ & x^T(x) Q x(t) - (1-\tau) x^T(t-d(t)) Q x(t-d(t)). \end{aligned}$$

首先证明当  $\omega(t)=0$  时, 闭环系统(6)状态鲁棒稳定。

由引理 2 和  $\|f(t)\| \leq \lambda \|x\|$  得到:

$$\begin{aligned} x^T(t)H^T D_1 \omega(t) + \omega^T(t)D_1^T Hx(t) &\leq \varepsilon_1^{-1} x^T(t)H^T D_1 D_1^T Hx(t) + \varepsilon_1 \omega^T(t)\omega(t) \leq \\ &\varepsilon_1^{-1} x^T(t)H^T D_1 D_1^T Hx(t), \\ g^T(x(t))Hx(t) + x^T(t)H^T g(x(t)) &\leq \varepsilon_1^{-1} x^T(t)H^T Hx(t) + \varepsilon_2 g^T(x(t))g(x(t)) \leq \\ &\varepsilon_2^{-1} x^T(t)H^T Hx(t) + \varepsilon_2 x^T(t)x(t). \\ f^T(t)F^T Hx(t) + x^T(t)H^T Ff(t) &\leq \varepsilon_3^{-1} x^T(t)H^T FF^T Hx(t) + \varepsilon_3 f^T(t)f(t) \leq \\ &\varepsilon_3^{-1} x^T(t)H^T FF^T Hx(t) + \varepsilon_3 \lambda x^T(t)x(t). \end{aligned}$$

由此可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq x^T(t)((A+BK)^T H + H^T(A+BK) + \varepsilon_1^{-1} H^T D_1 D_1^T H + \varepsilon_2^{-1} H^T H + \varepsilon_2^{-1} H^T FF^T H + \\ &\varepsilon_3^{-1} H^T FF^T H + \varepsilon_2 I + \varepsilon_3 \lambda I)x(t) + x^T(t)H^T A_d x(t-d(t)) + x^T(t-d(t))A_d^T Hx(t), \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq x^T(t)((A+BK)^T H + H^T(A+BK) + \varepsilon_1^{-1} H^T D_1 D_1^T H + \varepsilon_2^{-1} H^T H + \varepsilon_3^{-1} H^T FF^T H + Q + \varepsilon_2 I + \varepsilon_3 \lambda I)x(t) + \\ &x^T(t)H^T A_d x(t-d(t)) + x^T(t-d(t))A_d^T Hx(t) - (1-\tau)x^T(t-d(t))Qx(t-d(t)) = \\ &\Phi^T \Omega \Phi, \end{aligned}$$

其中:

$$\Phi = [x^T(t) \quad x^T(t-d(t))]^T; \quad \Omega = \begin{bmatrix} \Xi_1 & H^T A_d \\ * & -(1-\tau)Q \end{bmatrix};$$

$$\Xi_1 = (A+BK)^T H + H^T(A+BK) + \varepsilon_1^{-1} H^T D_1 D_1^T H + \varepsilon_2^{-1} H^T H + \varepsilon_3^{-1} H^T FF^T H + Q + \varepsilon_2 I + \varepsilon_3 \lambda I.$$

利用 Schur 补引理,可得式(8)相当于  $\Omega < 0$ 。根据以上计算和讨论,得到  $\dot{V}(t) < 0$ ,因此闭环系统(6)是鲁棒稳定。

其次,证明如下满足  $\|y(t)\|_\infty \leq \gamma^2 \|\omega(t)\|_\infty$ 。

在零初始条件下,对任意的  $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ ,考虑以下的性能指标函数:

$$J = \int_0^\infty [y^T(t)y(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)]dt.$$

根据闭环系统(6)鲁棒稳定性的推论,可以得到:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty [y^T(t)y(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)]dt - V(t) \leq \\ &\int_0^\infty [y^T(t)y(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)]dt \leq \\ &\int_0^\infty [x^T(t)(C+D_2K)^T(C+D_2K)x(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)]dt. \end{aligned}$$

应用引理 2 和  $\|f(t)\| \leq \lambda \|x\|$  得:

$$\begin{aligned} x^T(t)H^T D_1 \omega(t) + \omega^T(t)D_1^T Hx(t) &\leq \gamma^{-2} x^T(t)H^T D_1 D_1^T Hx(t) + \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t), \\ g^T(x(t))Hx(t) + x^T(t)H^T g(x(t)) &\leq \varepsilon_4 x^T(t)H^T Hx(t) + \varepsilon_4^{-1} g^T(x(t))g(x(t)) \leq \\ &\varepsilon_4 x^T(t)H^T Hx(t) + \varepsilon_4^{-1} x^T(t)x(t), \\ f^T(t)F^T Hx(t) + x^T(t)H^T Ff(t) &\leq \varepsilon_5 x^T(t)H^T FF^T Hx(t) + \varepsilon_5^{-1} f^T(t)f(t) \leq \\ &\varepsilon_5 x^T(t)H^T FF^T Hx(t) + \varepsilon_5^{-1} \lambda x^T(t)x(t), \end{aligned}$$

即可以得到:

$$J \leq \int_0^\infty [x(t)^T(C+D_2K)^T(C+D_2K)x(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t) + \dot{V}(t)]dt \leq$$

其中:

$$\Phi = [x^T(t) \quad x^T(t-d(t))]^T, \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & \mathbf{H}^T \mathbf{A}_d \\ * & -(1-\tau)\mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_3 = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^T \mathbf{H} + \mathbf{H}^T (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} + (\mathbf{D}_2 \mathbf{K})^T \mathbf{D}_2 \mathbf{K} + \gamma^{-2} \mathbf{H}^T \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \mathbf{H} + \epsilon_4 \mathbf{H}^T \mathbf{H} + \epsilon_5 \mathbf{H}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{H} + \mathbf{Q} + \epsilon_4^{-1} \mathbf{I} + \epsilon_5^{-1} \mathbf{M}.$$

再根据闭环系统(6)鲁棒稳定性的推论,得到  $\Omega_2 < 0$ , 所以有:

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty [y^T(t)y(t) - \gamma^2 \omega^T(t)\omega(t)] dt < 0, \text{ 则 } \int_0^\infty y^T(t)y(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t) dt.$$

因此控制输出  $y(t) \in [0, \infty)$  满足  $\|y(t)\|_\infty \leq \gamma^2 \|\omega(t)\|_\infty$ .

**定理 3** 如果对任意标量  $\gamma > 0$  和  $\epsilon > 0$ , 存在非奇异可逆矩阵  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^n$ , 对称正定矩阵  $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和矩阵  $\bar{\mathbf{K}} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 满足下列不等式:

$$\mathbf{E}^T \mathbf{M} = \mathbf{E}^T \mathbf{E} \geq 0, \quad (10)$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_4 & \mathbf{A}_d \bar{\mathbf{Q}} & \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{D}_2^T & \mathbf{M}^T \mathbf{C}^T & \mathbf{D}_1^T & \mathbf{M}^T & \mathbf{M}^T & \mathbf{M}^T \\ * & -(1-\tau)\mathbf{Q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{\mathbf{Q}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & -\epsilon_4 \mathbf{I} & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 & -\epsilon_5 \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中:  $\mathbf{E}_4 = (\mathbf{A}\mathbf{M})^T + (\mathbf{B}\bar{\mathbf{K}})^T + \mathbf{A}\mathbf{M} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}} + \epsilon_4 \mathbf{I} + \epsilon_5 \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{M}, \gamma^2 = \bar{\gamma}$ .

则闭环系统(6)由控制器(5)得出状态鲁棒稳定, 而且满足  $\|y(t)\|_\infty \leq \gamma^2 \|\omega(t)\|_\infty$ . 如果存在可行解  $(\bar{\mathbf{K}}, \mathbf{M})$  满足以上线性矩阵不等式, 则构造  $\mathbf{K} = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{M}^{-1}$  为状态反馈控制器的参数.

**证明** 显然式(7)等价于式(10), 将式(9)的左右两边分别乘以  $\text{diag}[\mathbf{H}^{-T}, \mathbf{I}]$  和  $\text{diag}[\mathbf{H}^{-1}, \mathbf{I}]$ , 利用 Schur 补引理, 可以得到一个类似式(11)的八阶的方阵, 然后将此方阵左右分别乘以  $\text{diag}[\mathbf{I}, \mathbf{Q}^{-T}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$  和  $\text{diag}[\mathbf{I}, \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \mathbf{I}]$  可得式(11).

### 3 数值仿真

考虑如下 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2(t) = (28 - x_3)x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3(t) = x_1 x_2 - 8/3 x_3. \end{cases}$$

如图 1 可得此系统的状态响应曲线, 得出系统的不稳定性.

这个系统能被推广为非线性时滞时变奇异系统(1)的形式, 参数如下:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

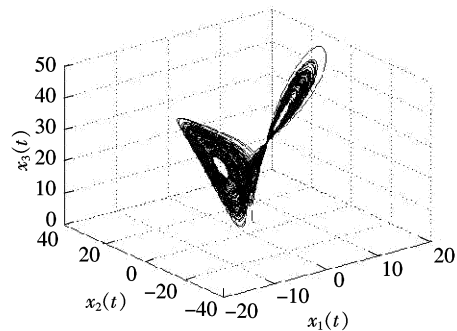


图 1 Lorenz 系统的状态响应曲线解  
Fig. 1 State response of the curve of the Lorenz system

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1(t)x_3(t) \end{bmatrix}.$$

其中  $d(t) = 2\sin(0.1t^2)$ , 基于系统的有界性存在一个真正的这样的常数  $\eta$ ,

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}(t))\| = \sqrt{(x_1(t)x_3(t))^2 + (x_1(t)x_2(t))^2} = |\mathbf{x}_1(t)| \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2} \leq \eta \|\mathbf{x}(t)\|.$$

通过 MATLAB 的 LMI 工具箱分别对线性矩阵不等式(4)和(11)进行仿真,可以分别得观测器参数和状态反馈控制器的参数矩阵:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.3499 & 1.2505 & -0.7229 \\ 0.1302 & -0.0713 & -0.0451 \\ 0.6744 & 3.8918 & -3.6298 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.9293 & 1.2809 & 1.0416 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0001 & 0.0027 \end{bmatrix}$$

然后得出误差动态闭环系统(3)的状态响应曲线见图 2,和图 3 展示容错控制闭环系统(6)的状态响应曲线。得到系统能保持稳定,因此本文所提出的容错控制器不被故障以及非线性因素干扰。

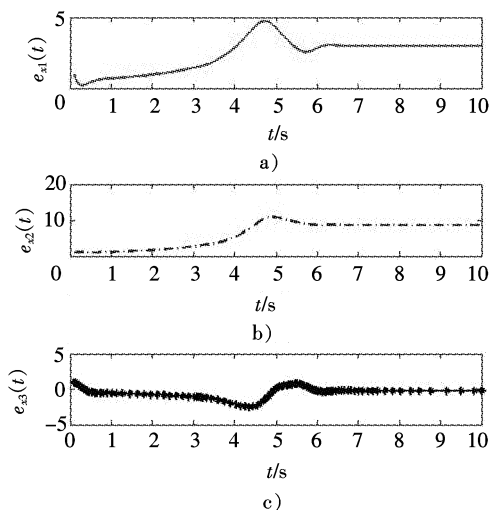


图 2 误差闭环系统(3)的状态响应曲线  
Fig. 2 State response of the curve of the error closed-loop system (3)

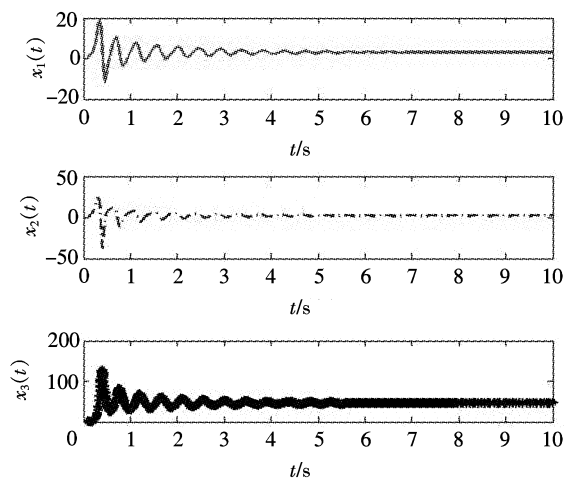
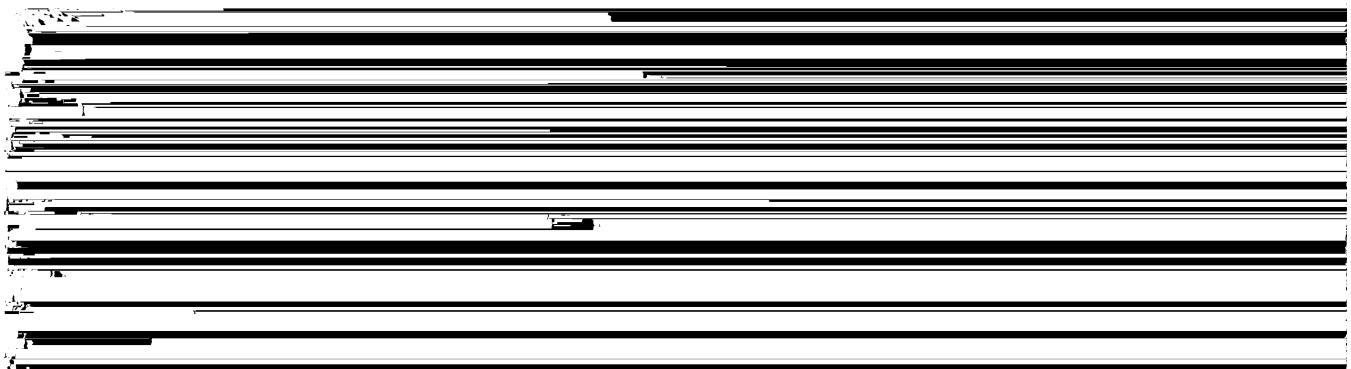


图 3 容错控制闭环系统(6)的状态响应曲线  
Fig. 3 State response of the curve of the fault tolerant control closed-loop system (6)

### 4 结 论

本文关于非线性时滞时变奇异系统,构造了一种新的故障诊断观测器,此方法解决了针对系统中已有的



- [3] CHEN M Y, ZHOU D H. Fault detection and isolation in a class of nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(6): 1011-1016.
- [4] KABORE R, WANG H. Design of fault diagnosis filters and fault-tolerant control for a class of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(11): 1805-1810.
- [5] ZHANG Y, JIANG J. Issues on integration of fault diagnosis and reconfigurable control in active fault-tolerant control systems[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2006, 39(13): 1437-1448.
- [6] HONGM W, TIAN Y C, DING J L, et al. Data driven fault diagnosis and fault tolerant control: Some advances and possible new directions[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(6): 739-747.
- [7] PUIG V. Fault diagnosis and fault tolerant control using set-membership approaches: Application to real case studies[J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2010, 20(4): 619-635.
- [8] WANG R, WANG J. Fault-tolerant control with active fault diagnosis for four-wheel independently driven electric ground vehicles[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2011, 60(9): 4276-4287.
- [9] YIN S, LUO H, DING S X. Real-time implementation of fault-tolerant control systems with performance optimization[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, 61(5): 2402-2411.
- [10] XU S Y, SHI P, CHU Y M, et al. Robust stochastic stabilization and control of uncertain neutral stochastic time-delay systems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, 314(1): 1-16.
- [11] WU Z G, ZHOU W N. Delay-dependent robust stabilization for uncertain singular systems with state delay[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(7): 714-718.
- [12] MEI F. Delay-dependent robust control for uncertain singular systems with state delay[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2009, 35(1): 65-70.
- [13] SHARIFUDDIN M, GOUTAM C, KINGSHOOK B. LMI approach to robust unknown input observer design for continuous systems with noise and uncertainties[J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2010, 8(2): 210-219.
- [14] 安新国. 基于故障诊断观测器的非线性系统的容错控制[D]. 石家庄:河北科技大学, 2013.  
AN Xinguo. Fault Tolerant Control of the Nonlinear System Based on Fault Diagnosisobserver[D]. Shijiazhuang: Hebei University of Science and Technology, 2013.
- [15] 王梦阳. 广义时变系统的鲁棒耗散及容错控制[D]. 沈阳:沈阳工业大学, 2015.  
WANG Mengyang. Robust Dissipative and Fault Tolerant Control for Generalized Time Varyingsystems[D]. Shenyang: Shenyang University of Technology, 2015.
- [16] 张立俊, 杨丽芸, 刘春菊, 等. 非线性不确定多时滞切换奇异系统的鲁棒保性能控制[J]. *河北科技大学学报*, 2015, 36(2): 150-156.  
ZHANG Lijun, YANG Liyun, LIU Chunju, et al. Robust guaranteed cost control for non-linear uncertain switched singular systems with multiple time-delay[J]. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, 2015, 36(2): 150-156.
- [17] YONEYAMA J. Robust stabilization for uncertain time-delay systems under time-varying sampling[J]. *Applied Mathematical Sciences*, 2009, 38(3): 1873-1883.
- [18] JIA Huimei, XIANG Zhengrong, KARIMIH R. Robust reliable passive control of uncertain stochastic switched time-delay systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 231:254-267.
- [19] DU Zhaoping, ZHANG Qinglin. Delay-dependent robust control for uncertain singular systems with multiple state delays[J]. *IET Control Theory Application*, 2009, 3(6): 731-740.
- [20] 李文晶, 唐睿, 李聪. 参数不确定时滞奇异系统的鲁棒控制[J]. *黑龙江科技信息*, 2015(15):34.
- [21] ARIK S, HAN Q L. Global asymptotic stability of a larger class of neural networks with constant time delay[J]. *Physics Letters A*, 2003, 311(1): 504-511.
- [22] SU X, WANG X Z. Flocking for multi-agents with a virtual leader[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(2):293-307.