第 40 卷第 6 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol.40,No.6
2019 年 12 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Dec. 2019

文章编号:1008-1542(2019)06-0482-06　　开放科学(资源服务)标识码(OSID):

带有 Hatree 和对数非线性项的 Schrödinger 方程非平凡解的存在性

郝剑伟,黄永艳

(山西大学数学科学学院,山西太原　030006)

摘　要:为了深入阐述变号势对对数非线性项和 Hatree 非线性项造成的影响,利用 Ekeland 变分方法,将方程转化为求能量泛函的临界点,然后利用 Hatree 非线性项的性质和对对数非线性项的技巧性处理,证明了带变号势,对数非线性项和 Hatree 非线性项的 Schrödinger 问题的能量泛函满足山路型结构,利用序列的有界性得到了(PS)条件。结果表明,结合山路结构,能够获得问题非平凡解的存在性。研究方法在理论证明得到了良好的预期结果,对研究带有双变号势的对数非线性项的 Schrödinger 方程解的存在性具有一定的借鉴意义。

关键词:非线性泛函分析;Schrödinger 方程;变号的势函数;对数不等式;变分方法;非平凡解

中图分类号:O175　　文献标志码:A　　doi:10.7535/hbkd.2019yx06001

Existence of nontrivial solution for Schrödinger equations with Hatree and Logarithmic nonlinearities

HAO Jianwei, HUANG Yongyan

(School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

Abstract: In order to expound the influence of sign-changing potential on logarithmic nonlinearity and Hatree nonlinearity. By the variational method, a weak solution to the problem is a critical point of the energy functional. Then, by the logarithmic inequality, the energy functional of Schrödinger problem satisfies the mountain geometry and (PS) condition. The existence of nontrivial solutions is obtained by mountain pass theorem. The research method has good expected results in theoretical proof and laid a good foundation for the study of Schrödinger problem with logarithmic nonlinearity with double sign-changing potential.

Keywords: nonlinear functional analysis; Schrödinger equation; sign-changing potential; logarithmic inequality; variational method; nontrivial solution

收稿日期:2019-08-18;修回日期:2019-09-05;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金(11671239,11701346,11801338)

第一作者简介:郝剑伟(1994—),男,山西平遥人,硕士研究生,主要从事非线性泛函分析方面的研究。

通信作者:黄永艳博士。E-mail:huangyongyan1985@163.com

郝剑伟,黄永艳.带有 Hatree 和对数非线性项的 Schrödinger 方程非平凡解的存在性[J].河北科技大学学报,2019,40(6):482-487.

HAO Jianwei, HUANG Yongyan. Existence of nontrivial solution for Schrödinger equations with Hatree and Logarithmic nonlinearities[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology,2019,40(6):482-487.

1　问题的提出

在本文中，研究了下面的 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases} -\Delta u+Vu=\phi(x)u+u\log|u|, & x\in\Omega, \\ -\Delta\phi=u^2, & x\in\Omega, \\ u=\phi=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中：Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中一个有界光滑区域；V 为势函数。

特别地，当 $V=1$ 且不含对数非线性项 $u\log|u|$ 时，方程就是常见的 Choquard-Pekar 方程，此方程来源于 Pekar 的极化子模型，已经被应用到各种物理模型中[1-2]。

当不含有对数非线性项时，MOROZ 等[3]证明了方程(1)基态解的存在性。随后，许多学者研究了带有 Hatree 非线性项的 Schrödinger 方程的解的性质[4-7]，如正则性、正性和径向衰减性。除此以外，带有对数非线性项的 Schrödinger 方程也得到广泛研究[8-14]。然而，在这些文献中，学者们假设势函数 V 是正的或者是常数。

基于上述文献，笔者研究带有 Hatree 和对数非线性项的 Schrödinger 方程非平凡解的存在性，其中位势 V 可以是变号的。注意到对数非线性项不满足单调性条件和 AR 条件，所以，对数非线性项在处理方法上和多项式方法不同。其次，由于问题(1)含有 Hatree 非线性项，这就需要处理好对数非线性项和 Hatree 非线性项之间的关系，这就使问题(1)变得比不含有 Hatree 非线性项的情形更加复杂，更具有挑战性。另外，研究的势函数 V 是变号的，也可以完全为负，进一步增加问题(1)的难度。ZHAO 等[15]研究了带有变号势 V 和对数非线性项问题解的存在性，其中势函数 V 满足 $V\in L^{3/2}(\Omega)$，$\inf_{x\in\Omega}V(x)\geqslant-\dfrac{1}{4}$。

定义 $V^+=\max\{V,0\}$，$V^-=\min\{V,0\}$，则 $V=V^++V^-$。对任意给定 $p\in[1,+\infty)$，设 $L^p(\Omega)$是通常的 Lebesgue 空间，其范数是 $|u|_p=(\int_\Omega|u|^p)^{1/p}$，$u\in L^p(\Omega)$。设 $H_0^1(\Omega)$ 是通常的 Hilbert 空间，其范数是 $\|u\|_{H_0^1}=(\int_\Omega|\nabla u|^2)^{1/2}$，$u\in H_0^1(\Omega)$。

设 $S=\inf_{u\in H_0^1\setminus\{0\}}\|u\|_{H_0^1}^2/|u|_6^2$，笔者给出主要结果。

定理 1　设 $V\in L^{3/2}(\Omega)$ 且 $|V^-|_{3/2}<S$，则方程(1) 存在非平凡解。

注释　此时的条件 V 比 ZHAO 等[15] 的研究更为复杂。此外，这里有许多函数满足 V 的条件，例如：位势 $V(x)=-\dfrac{\lambda}{1+|x|^4}$，$x\in\Omega$ 和变号势 $V(x)=\begin{cases}\dfrac{3\lambda}{1+|x|^4}, & |x|\leqslant1, \\ -\dfrac{\lambda}{1+|x|^4}, & |x|>1,\end{cases}$ 这里 $\lambda\in(0,S(2\omega)^{-2/3})$，$\omega$ 是 Ω 中单位球的体积。

2　准备工作

以下用 $C,C_i,i=1,2,\cdots$，表示不同的正常数，$H_0^1(\Omega)$可以连续嵌入 $L^p(\Omega)$，其中 $p\in[1,2^*]$，$H_0^1(\Omega)$可以紧嵌 $L^q(\Omega)$，$q\in[2,2^*)$，$2^*=2N/(N-2)$指的是 Sobolev 临界指数。

根据 V 的条件，对于任意 $u\in H_0^1(\Omega)$，有：

$$\int_\Omega(|\nabla u|^2+Vu^2)\geqslant\int_\Omega|\nabla u|^2-\int_\Omega|V^-|u^2\geqslant$$
$$(1-S^{-1}|V^-|_{3/2})\int_\Omega|\nabla u|^2:=\delta\int_\Omega|\nabla u|^2, \tag{2}$$

这里 $\delta=1-S^{-1}|V^-|_{3/2}$。

根据式(2)以及 V 的条件，定义 $H_0^1(\Omega)$ 上的范数：

$$\| u \| = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + Vu^2)\right)^{1/2}, u \in H_0^1(\Omega),$$

则 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_{H_0^1}$ 是等价的。事实上，根据 Sobolev 嵌入定理和 Hölder 不等式，有：

$$\| u \|^2 = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + Vu^2) \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2 + |V|_{3/2} |u|_6^2 \leqslant C \| u \|_{H_0^1}^2, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

从而，所推出的 2 个范数是等价的。

命题 1 （对数 Sobolev 不等式[11-12]）设 $a>0$，则：

$$2\int_{\mathbf{R}^3} u^2 \log \frac{|u|}{|u|_2} + 3(1+\log a)|u|_2^2 \leqslant \frac{a^2}{\pi}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2, \quad u \in H_0^1(\mathbf{R}^3)\backslash\{0\}。$$

对于任意给定的 $u\in H_0^1(\Omega)$，当 $x\in \mathbf{R}^3\backslash\Omega$，定义 $u(x)=0$。根据命题 1，有：

$$\int_\Omega |u|^2 \log \frac{|u|}{|u|_2} \leqslant \frac{a^2}{2\pi}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{3}{2}(3+\log a)|u|_2^2。$$

引理 1 对于每一个 $u\in H_0^1(\Omega)$，存在唯一的 $\phi_u\in H_0^1(\Omega)$，使得：

$$\begin{cases} -\Delta\phi_u = u^2, & x\in\Omega, \\ \phi_u = 0, & x\in\partial\Omega。\end{cases}$$

此外，可得到下面的结论：

Ⅰ）$\| \phi_u \|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega \phi_u u^2$；

Ⅱ）$\phi_m \geqslant 0, x \in \Omega$，而且当 $u \neq 0$ 时，$\phi_u > 0, x \in \Omega$；

Ⅲ）对 $\theta > 0$，有 $\phi_{\theta u} = \theta^2 \phi_u$；

Ⅳ）设 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中弱收敛于 u，则 $\phi_{u_n} \to \phi_u$；

Ⅴ）$\| \phi_u \|_{H_0^1} \leqslant C_1 |u|_{5/12}^2$。

证明 关于结论Ⅰ)，Ⅱ)，Ⅲ)，Ⅳ)的证明，参看文献[16—18]。下面给出结论Ⅴ)的证明。事实上，根据 Sobolev 不等式和 Hölder 不等式，有：

$$\| \phi_u \|_{H_0^1}^2 = \int_\Omega \phi_u u^2 \leqslant |\phi_u|_6 |u|_{12/5}^2 \leqslant C_1 \| \phi_u \|_{H_0^1} |u|_{12/5}^2,$$

因此，结论Ⅴ）成立。

证毕。

通过引理 1，在方程(1)中用 ϕ_u 替换，有下面的方程：

$$\begin{cases} -\Delta u + Vu = \phi_u u + u \log|u|, & x \in \Omega, \\ -\Delta\phi_u = u^2, & x \in \Omega, \\ u = \phi_u = 0, & x \in \partial\Omega。\end{cases}$$

定义能量泛函 $J: H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$，

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + Vu^2) - \frac{1}{4}\int_\Omega \phi_u u^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \log|u| + \frac{1}{4}\int_\Omega u^2, \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

显然，$J\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbf{R})$ 且有：

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + Vuv) - \int_\Omega \phi_u uv - \int_\Omega uv \log|u|, \quad u, v \in H_0^1(\Omega),$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示匹配，那么，J 的临界点是方程(1)的弱解。

3　主要结论证明

证明能量泛函 J 满足山路结构和 PS 条件。

引理 2　能量泛函 J 满足山路结构，即

i)存在 $\beta,\rho>0$,使得 $\|u\|=\rho$ 时,$J(u)\geqslant\beta$;

ii) 存在 $\alpha\in H_0^1(\Omega)$,使得 $\|\alpha\|>\rho$ 且 $J(\alpha)<0$。

证明　首先,根据引理 1 和 Sobolev 嵌入定理,有 $\|\phi_u\|^2\leqslant C_2\|u\|^4$。根据式(2)中 V 的条件和对数不等式,对于任意的 $u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$,有:

$$J(u)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{\delta}{4}\int_\Omega|\nabla u|^2-\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u u^2-\frac{1}{2}\int_\Omega u^2\log\frac{|u|}{|u|_2}+\frac{1}{4}\int_\Omega u^2\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{\delta}{4}\int_\Omega|\nabla u|^2-\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_u u^2-\frac{a^2}{4\pi}\int_\Omega|\nabla u|^2+$$

$$\frac{1}{4}(4+3\log a)\int_\Omega u^2-\frac{1}{2}\log|u|\int_\Omega u^2\geqslant$$

$$\frac{1}{4}\|u\|^2+\frac{1}{4}\left(\delta-\frac{a^2}{\pi}\right)\int_\Omega|\nabla u|^2+$$

$$\frac{1}{4}(4+3\log a-2\log|u|_2)|u|_2-C_2\|u\|^4。$$

取 $a=\sqrt{\pi\delta}$,则当 $|u|_2^2\leqslant(\pi\delta)^{3/2}\mathrm{e}^4$ 时,有 $4+3\log a-2\log|u|_2\geqslant0$。根据 Sobolev 嵌入定理,有 $|u|_2\leqslant C_3\|u\|$。因此,当 $\rho>0$ 充分小且 $\|u\|=\rho$ 时,有 $|u|_2^2\leqslant C_3^2\|u\|^2\leqslant(\pi\delta)^{3/2}\mathrm{e}^4$。进一步,有 $J(u)\geqslant\frac{1}{4}\|u\|^2-C_2\|u\|^4=\frac{1}{4}\|u\|^2(1-4C_2\|u\|^2)$。所以存在 $\rho>0,\beta>0$,使得 $J(u)\geqslant\beta$,其中 $\rho<\min\{C_3^{-1}(\pi\delta)^{3/4}\mathrm{e}^2,2^{-1}C_2^{1/2}\}$足够小。

在证明条件 ii)之前,先给出下面的不等式:

$$\log\theta<\theta,\quad\theta>0。\tag{3}$$

设 $u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$,则对于 $t>0$,有:

$$J(tu)=\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^4}{4}\int_\Omega\phi_u u^2-\frac{t^2}{2}\int_\Omega u^2\log|tu|+\frac{t^2}{4}\int_\Omega u^2=$$

$$\frac{t^2}{2}\|u\|^2-\frac{t^4}{4}\int_\Omega\phi_u u^2-\frac{t^2\log t}{2}\int_\Omega u^2-\frac{t^2}{2}\int_\Omega u^2\log|u|+\frac{t^2}{4}\int_\Omega u^2,$$

易知,当 $t\to\infty$时,$J(tu)\to-\infty$。因此,存在 $t_1>0$ 充分大,使得 $\|t_1u\|>\rho$ 且 $J(t_1u)<0$。取 $\alpha=t_1u$,完成条件 ii)的证明。

证毕。

引理 3　能量泛函 J 满足 PS 条件。

证明　设$\{u_n\}\subset H_0^1(\Omega)$是能量泛函 J 的一个 PS 序列,则存在某个正数 b,有$|J(u_n)|\leqslant b$,$n=1,2,\cdots$,而且当 $n\to\infty$时,有 $J(u_n)\to0$。笔者断言$\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega)$中是有界的。事实上,

$$\frac{1}{4}|u_n|_2^2=J(u_n)-\frac{1}{2}\langle J'(u_n),u_n\rangle-\frac{1}{4}\int_\Omega\phi_{u_n}u_n^2\leqslant b+o(1)\|u_n\|,\tag{4}$$

根据式(3)和式(4),有:

$$\int_\Omega u_n^2\log|u_n|_2=\log|u_n|_2\int_\Omega u_n^2\leqslant|u_n|_2\int_\Omega u_n^2\leqslant(4b+o(1)\|u_n\|)^{3/2}。\tag{5}$$

取 $a=\sqrt{\pi\delta}$，根据对数不等式，式(5)和式(4)，有：

$$
\begin{aligned}
b+o(1)\|u_n\| \geqslant & J(u_n)-\frac{1}{4}\langle J'(u_n),u_n\rangle \geqslant \\
& \frac{1}{4}\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+Vu_n^2)-\frac{1}{4}\int_\Omega u_n^2\log|u_n| \geqslant \\
& \frac{1}{8}\int_\Omega(|\nabla u_n|^2+Vu_n^2)-\frac{1}{4}\int_\Omega u_n^2\log|u_n|_2+\frac{3}{8}(1+\log\sqrt{\pi\delta})|u_n|_2^2 \geqslant \\
& \frac{1}{8}\|u_n\|^2-\frac{1}{4}(4b+o(1)\|u_n\|)^{3/2}-\frac{3}{8}|1+\log\sqrt{\pi\delta}|(4b+o(1)\|u_n\|),
\end{aligned}
$$

从而$\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega)$中是有界的。因此，$\{u_n\}$在 $H_0^1(\Omega)$中存在弱收敛的子序列，不妨仍记为$\{u_n\}$，且在 $H_0^1(\Omega)$中 $u_n \rightharpoonup u$，根据 Sobolev 嵌入定理，在 $L^q(\Omega)$中 $u_n \to u$，其中 $q\in[2,2^*)$。根据文献[15]和文献[19]，存在 $C_4>0$，使得下面的不等式成立：$|t\log|t||\leqslant C(1+t^2)$，$t\in\mathbf{R}$。从而，当 $n\to\infty$时，有：

$$
\left|\int_\Omega(u_n\log|u_n|-u\log|u|)(u_n-u)\right| \leqslant |u_n\log|u_n|-u\log|u||_2\,|u_n-u|_2 \to 0。 \tag{6}
$$

根据引理 1 中结论Ⅴ)，Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理，有：

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\phi_{u_n}u_n(u_n-u)\right| \leqslant & |\phi_{u_n}|_6\,|u_n|_{12/5}\,|u_n-u|_{12/5} \leqslant \\
& C_5\|\phi_{u_n}\|\,|u_n|_{12/5}\,|u_n-u|_{12/5} \leqslant \\
& C_6\|u_n\|^3\,|u_n-u|_{12/5},
\end{aligned}
$$

使用相同方法易知：$\left|\int_\Omega\phi_u u(u_n-u)\right| \leqslant C_7\|u\|^3\,|u_n-u|_{12/5}$。

当 $n\to\infty$时，有：

$$
\left|\int_\Omega(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u)(u_n-u)\right| < \left|\int_\Omega\phi_{u_n}u_n(u_n-u)\right|+\left|\int_\Omega\phi_u u(u_n-u)\right| \to 0, \tag{7}
$$

易知：

$$
\begin{aligned}
\|u_n-u\|^2 = & \langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\rangle+ \\
& \int_\Omega(\phi_{u_n}u_n-\phi_u u)(u_n-u)+ \\
& \int_\Omega(u_n\log|u_n|-u\log|u|)(u_n-u)。
\end{aligned} \tag{8}
$$

显然，

$$
\langle J'(u_n)-J'(u),u_n-u\rangle \to 0。 \tag{9}
$$

因此，根据式(6)、式(7)和式(9)，可推出$\|u_n-u\|\to 0$。

证毕。

定理 1 的证明 根据引理 2 和引理 3，知道能量泛函 J 满足山路结构和 PS 条件。因此，根据山路定理[20]，泛函 J 在 $H_0^1(\Omega)$中有一个非平凡的临界点，也就是说方程(1)存在一个非平凡解。

参考文献/References：

[1] ELLIOTT H L. Existence and uniqueness of the minimizing solution of choquard\"s nonlinear equation [J]. Studies in Applied Mathematics，1977，57(2)：93-105.

[2] LIONS P L. The Choquard equation and related questions [J]. Nonlinear analysis：Theory，Methods & Applications，1980，4(6)：1063-1072.

[3] MOROZ V，SCHAFTINGEN J V. Groundstates of nonlinear Choquard equations：Existence，qualitative properties and decay asymptotics[J]. Journal of Functional Analysis，2013，265(2)：153-184.

[4] GAO Fashun, YANG Minbo. On nonlocal Choquard equations with Hardy-Littlewood-Sobolev critical exponents[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 448(2):1006-1041.

[5] DAVID R, SCHAFTINGEN J V. Odd symmetry of least energy nodal solutions for the Choquard equation [J]. Journal of Differential Equations, 2016:S0022039617305193.

[6] LI Guidong, LI Yongyong, TANG Chunlei, et al. Existence and concentrate behavior of ground state solutions for critical Choquard equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 81:96.

[7] MOROZ V, SCHAFTINGEN J V. A guide to the Choquard equation [J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2017, 19(1): 773-813.

[8] TIAN Shuying. Multiple solutions for the semilinear elliptic equations with the sign-changing logarithmic nonlinearity [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2017, 454(2):816-828.

[9] SQUASSINA M, SZULKIN A. Multiple solutions to logarithmic Schrödinger equations with periodic potential [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2015, 54(1):585-597.

[10] KAZUNAGA T, ZHANG Chengxiang. Multi-bump solutions for logarithmic Schrödinger equations [J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2017, 2(2):33-56.

[11] ARDILA A H, SQUASSINA M. Gausson dynamics for logarithmic Schrödinger equations [J]. Asymptotic Analysis, 2017, 107(3/4): 203-226.

[12] JI Chao, SZULKIN A. A logarithmic Schrödinger equation with asymptotic conditions on the potential[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applcations, 2016, 437(1): 241-254.

[13] CARRILLO J A, NI Lei. Sharp logarithmic Sobolev inequalities on gradient solitons and applications [J]. Communications in Analysis & Geometry, 2009, 17(4):721-753.

[14] JIA Wenyan, WANG Zuji. Multiple solution of p-Laplacian equation with the logarithmic nnlinearity[J]. Journal of North University of China, 2019, 40(1):26-33.

[15] ZHAO Li, HUANG Yongyan. The existence of the solution for Kirchhoff problem with sign-changing potential and logarithmic nonlinearity [J]. Journal of Shaanxi University of Science, 2019, 37(3):176-184.

[16] WANG Jun, TIAN Lixin, XU Junxiang, et al. Erratum to: Existence and concentration of positive solutions for semilinear Schrödinger-Poisson systems in R^3[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2013, 48(1/2):275-276.

[17] LI Yuhua, LI Fuyi, SHI Junping. Existence and multiplicity of positive solutions to Schrödinger-Poisson type systems with critical nonlocal term [J]. Calculus of Variations & Partial Differential Equations, 2017, 56(5):134-151.

[18] WANG Zhengping, ZHOU Huansong. Sign-changing solutions for the nonlinear Schrödinger-Poisson system in R^3 [J]. Calculus of Variations & Partial Differential Equations, 2015, 52:927-943.

[19] LIU Hongliang, LIU Zhisu, XIAO Qizhen. Ground state solution for a fourth-order nonlinear elliptic problem with logarithmic nonlinearity[J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 79:176-181.

[20] WILLEM M. Minimax theorems[J]. Progress in Nonlinear Differential Equations & Their Applications, 1996, 50(1):139-141.