文章编号:1008-1542(2019)06-0477-05 开放科学(资源服务)标识码(OSID):

具有 $n-4$ 个悬挂点的三圈图补图的最小特征值

剧宏娟,雷英杰

(中北大学理学院,山西太原 030051)

摘 要:为了讨论给定阶数为 n 且具有 $n-4$ 个悬挂点的三圈图补图图类中邻接矩阵的最小特征值,刻画其最小特征值达到极小的唯一图。在只考虑简单无向连通图的基础上,从补图的结构出发研究图的最小特征值,通过运用相关知识点分析论证了当值为 $\lambda(\boldsymbol{G}(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)^{C})$ 时,给定阶数为 n 且具有 $n-4$ 个悬挂点的三圈图补图图类中邻接矩阵的最小特征值达到极小的唯一图。结果表明:结合图邻接矩阵是表示顶点之间相邻关系的矩阵,它的最小特征值为图的最小特征值,较好地刻画图的本质性质。研究得出的具有 $n-4$ 个悬挂点的三圈图补图的最小特征值达到极小的唯一图,为后续进一步研究补图图类中邻接矩阵的最小特征值提供了一定的借鉴价值。

关键词:图论;三圈图;邻接矩阵;最小特征值;悬挂点;补图

中图分类号:O157.5 文献标志码:A **doi**:10.7535/hbkd.2019yx06004

Minimum eigenvalue of the complement of tricyclic graphs with $n-4$ pendent vertexes

JU Hongjuan, LEI Yingjie

(School of Science, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China)

Abstract: In order to discuss the minimum eigenvalue of adjacency matrix in the class of complementary graphs of the tricyclic graph with a given order of n and $n-4$ pendent vertexes, the unique graph whose minimum eigenvalue reaches the minimum is characterized. Based on the simple undirected connected graph, the minimum eigenvalue of the graph is studied from the structure of the complement graph, and the minimum eigenvalue of the adjacency matrix in the complement graph class of the tricyclic graph with a given order of n and $n-4$ pendent vertexes reaches the minimum unique graph when the value is $\lambda(\boldsymbol{G}(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)^{C})$. The result shows that the associative graph adjacency matrix is a matrix which represents the adjacency between vertices, and its minimum eigenvalue is the minimum eigenvalue of graph, which can describe the essential properties of graph well. The conclusion from this research shows that the minimum eigenvalue of the complement graph of the tricyclic graph with a given order of n and $n-4$ pendent vertexes reaches the minimum eigenvalue, which provides certain

---

收稿日期:2019-06-13;修回日期:2019-08-27;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(11602232)

第一作者简介:剧宏娟(1991—),女,山西山阴人,硕士研究生,主要从事组合数学方面的研究。

通信作者:雷英杰副教授。E-mail:leiyingjie@nuc.edu.cn

剧宏娟,雷英杰.具有 $n-4$ 个悬挂点的三圈图补图的最小特征值[J].河北科技大学学报,2019,40(6):477-481.

JU Hongjuan, LEI Yingjie.Minimum eigenvalue of the complement of tricyclic graphs with $n-4$ pendent vertexes[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2019,40(6):477-481.

reference for further study of the minimum eigenvalue of the adjacency matrix in the complement graph class.

Keywords: graph theory; tricyclic graph; adjacency matrix; the minimum eigenvalue; pendent vertexes; complement graph

设$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$是一个$n$阶简单无向图,其顶点集为$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})=\{v_1, v_2,\cdots, v_n\}$,边集$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})=\{e_1, e_2,\cdots, e_m\}$。图$\boldsymbol{G}$中与顶点$v$相邻的点的集合定义为顶点$v$的领域,记为$\boldsymbol{N}_G(v)$,顶点$v$的度记为$d(v)=|\boldsymbol{N}_G(v)|$。图$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$的补图记为$\boldsymbol{G}^C=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E}^C)$,其中$\boldsymbol{E}^C=\{xy:x,y\in\boldsymbol{V},x\neq y,xy\notin\boldsymbol{E}\}$。图$\boldsymbol{G}$的邻接矩阵是$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})=(a_{ij})_{n\times n}$,如果$v_iv_j\notin\boldsymbol{E}$,则$a_{ij}=0$;如果$v_iv_j\in\boldsymbol{E}$,则$a_{ij}=1$。由于$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$是实对称矩阵,故它的特征值是实数且可将$n$个特征值从小到大排序为$\lambda_1(\boldsymbol{G})\geqslant\lambda_2(\boldsymbol{G})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{G})$。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$的特征值被称为图$\boldsymbol{G}$的特征值。其中$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$的最大特征值$\lambda_1(\boldsymbol{G})$为图$\boldsymbol{G}$的最大特征值,记作$\lambda_{\max}(\boldsymbol{G})$,$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$的最小特征值$\lambda_n(\boldsymbol{G})$为图$\boldsymbol{G}$的最小特征值,记作$\lambda(\boldsymbol{G})$,它对应的特征向量为图$\boldsymbol{G}$的第一特征向量。

图的邻接矩阵的谱性质研究是代数图论的重要研究课题,邻接谱半径的极图问题是谱图理论的热门问题,对图谱半径的研究已有不少研究成果。然而,对于谱半径最小特征值的研究相对较少。近年来,最小特征值的问题已经越来越受到国内外学者的重视[1-21]。文献[1-3]研究某些图类的最小特征值的极小图,其中最早由BELL等[1-2]刻画了图类的最小特征值的极小图,此工作使研究者对图的最小特征值问题有了更多的关注。文献[5—21]从补图结构出发,分别研究了补图为2-点(边)连通图、树、单圈图、连通图、具有独立数的单圈图、三圈图、具有悬挂点的单圈图和具有独立数的双圈图图类的最小特征值。受此启发,笔者仍从补图的结构出发,在只考虑简单无向连通图的基础上,研究了给定阶数为n且具有$n-4$个悬挂点的三圈图补图图类中邻接矩阵的最小特征值,刻画此类图最小特征值达到极小的唯一图。

1 预备工作

为了方便讨论,介绍以下必备知识点。

图$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$,对于向量$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$,如果存在一个从$\boldsymbol{V}$到$\boldsymbol{X}$中值的映射$\boldsymbol{\varphi}$,满足对于任意$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{V}$有$\boldsymbol{X}_u=\boldsymbol{\varphi}(u)$,则称$\boldsymbol{X}$定义在$\boldsymbol{G}$上。

对于任意向量$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$,有:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{X}=2\sum_{uv\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v, \tag{1}$$

若λ是$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})$对应于特征向量$\boldsymbol{X}$的特征值,则由特征值的定义,当且仅当$\boldsymbol{X}\neq 0$,对于每个$v\in\boldsymbol{V}$,有:

$$\lambda\boldsymbol{X}_v=\sum_{u\in\boldsymbol{N}_G(v)}\boldsymbol{X}_u, \tag{2}$$

式(2)为$\boldsymbol{G}$关于$\boldsymbol{X}$的特征等式。另外,对于单位向量$\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n$,有:

$$\lambda(\boldsymbol{G})\leqslant\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{X}, \tag{3}$$

当且仅当$\boldsymbol{X}$是$\boldsymbol{G}$的第一特征向量时等式成立。

这里$\boldsymbol{G}^C$是图$\boldsymbol{G}$的补图。记$\boldsymbol{J}$是元素全为1的n阶矩阵,$\boldsymbol{I}$是n阶单位矩阵,有:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}^C)=\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}), \tag{4}$$

在这里,记Ω_n为给定阶数为n且具有$n-4$个悬挂点的三圈图,则它的三内圈必两两共边,其三内圈为$\boldsymbol{C}_3$,其外圈为$\boldsymbol{C}_3$,这里$n-4$个悬挂点只悬挂在圈外的2个顶点上,悬挂点的个数记为$p,q(p+q=n-4)$。显然有$\boldsymbol{G}(p,q)\cong\boldsymbol{G}(q,p)$,如图1所示。

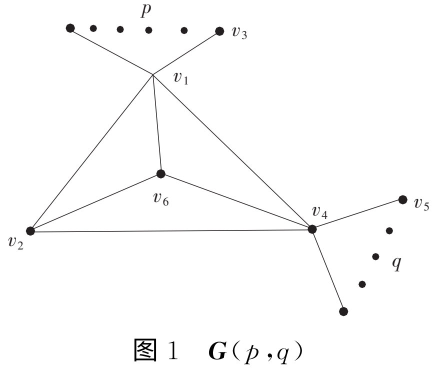

图1 $\boldsymbol{G}(p,q)$

Fig.1 $\boldsymbol{G}(p,q)$

引理1[4] 设$\boldsymbol{A}$是一个实对称$n\times n$阶矩阵,$\boldsymbol{B}$为$\boldsymbol{A}$的$m\times m$阶主子阵,且$\mu_1(\boldsymbol{A})\geqslant\mu_2(\boldsymbol{A})\geqslant\cdots\geqslant\mu_n(\boldsymbol{A})$,$\mu_1(\boldsymbol{B})\geqslant\mu_2(\boldsymbol{B})\geqslant\cdots\geqslant\mu_m(\boldsymbol{B})$,分别为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的特征值,则对于$i=1,2,\cdots,m$,有$\mu_{n-m+i}(\boldsymbol{A})\leqslant\mu_i(\boldsymbol{B})\leqslant\mu_i(\boldsymbol{A})$。

引理2 给定正整数$n(n\geqslant 12)$,对于任意的整数p,q,当$p>q\geqslant 0$,有$\lambda(\boldsymbol{G}(p,q)^C)>\lambda(\boldsymbol{G}(p-1,q+1)^C)$。

证明　设 $\boldsymbol{G}(p,q)$ 如图 1 所示，$\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{G}=(p,q)^C$ 的第一特征向量。由于 $\boldsymbol{K}_2\subset\boldsymbol{G}(p,q)^C$，且 $\lambda(\boldsymbol{K}_2)=-1$，由引理 1 知 $\lambda(\boldsymbol{G}(p,q)^C)\leqslant-1$。根据邻接矩阵的特征等式(2)知 $\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_6$，且点 v_1 的 p 个悬挂点在 $\boldsymbol{X}$ 中对应的值相同，记为 $\boldsymbol{X}_3$；v_4 的 q 个悬挂点在 $\boldsymbol{X}$ 中对应的值相同，记为 $\boldsymbol{X}_5$。并记 $\boldsymbol{X}_{v1}=\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_{v2}=\boldsymbol{X}_{v6}=\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_{v4}=\boldsymbol{X}_4$。

由式(2)可得到：

$$\begin{cases}\lambda\boldsymbol{X}_1=q\boldsymbol{X}_5,\\ \lambda\boldsymbol{X}_2=p\boldsymbol{X}_3+q\boldsymbol{X}_5,\\ \lambda\boldsymbol{X}_3=2\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_4+q\boldsymbol{X}_5+(p-1)\boldsymbol{X}_3,\\ \lambda\boldsymbol{X}_4=p\boldsymbol{X}_3,\\ \lambda\boldsymbol{X}_5=\boldsymbol{X}_1+2\boldsymbol{X}_2+p\boldsymbol{X}_3+(q-1)\boldsymbol{X}_5,\end{cases}$$

将上式转化成矩阵等式 $(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}'=0$，
其中：

$$\boldsymbol{X}'=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4,\boldsymbol{X}_5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&q\\0&0&p&0&q\\0&2&p-1&1&q\\0&0&p&0&0\\0&0&p&0&q-1\end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{f}(x;p,q)=\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$，可以得到：

$$\boldsymbol{f}(x;p,q)=x^5+(2-p-q)x^4-(4p+4q-1)x^3+(2pq-3p-3q)x^2+5pqx,$$

则 λ 为多项式 $\boldsymbol{f}(x;p,q)=0$ 的最小根。显然，$\boldsymbol{f}(x;p-1,q+1)-\boldsymbol{f}(x;p,q)=(p-q-1)x(2x+5)$，由于 $p>q\geqslant0$，$\lambda\leqslant-1$，故有：$\boldsymbol{f}(\lambda;p-1,q+1)-\boldsymbol{f}(\lambda;p,q)=(p-q-1)\lambda(2\lambda+5)<0$，从而有：$\lambda(\boldsymbol{G}(p,q)^C)>\lambda(\boldsymbol{G}(p-1,q+1)^C)$。

2　主要结果

定理 1　给定正整数 $n(n\geqslant12)$，对于任意的整数 $p,q(p,q\geqslant0)$，有：$\lambda(\boldsymbol{G}(p,q)^C)\geqslant\lambda(\boldsymbol{G}(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)^C)$，当且仅当 $\boldsymbol{G}(p,q)=\boldsymbol{G}(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)$ 时等号成立。

证明　设 $\boldsymbol{G}(p,q)$ 如图 1 所示，$\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{G}(p,q)^C$ 的第一特征向量。$\boldsymbol{K}_2\in\boldsymbol{G}(p,q)^C$，且 $\lambda(\boldsymbol{K}_2)=-1$，从引理 1 可知 $\lambda[\boldsymbol{G}(p,q)^C]\leqslant-1$。根据邻接矩阵等式(2)知 v_1 的 p 个悬挂点在 $\boldsymbol{X}$ 中对应的值相同，记为 $\boldsymbol{X}_4$，v_3 的 q 个悬挂点在 $\boldsymbol{X}$ 中对应的值相同，记为 $\boldsymbol{X}_5$，且 $\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{X}_6$，并记 $\boldsymbol{X}_{v1}=\boldsymbol{X}_1$，$\boldsymbol{X}_{v2}=\boldsymbol{X}_{v6}=\boldsymbol{X}_2$，$\boldsymbol{X}_{v3}=\boldsymbol{X}_3$。

1)若 $q=0$，由式(2)，记 $\boldsymbol{X}_{v2}=\boldsymbol{X}_{v6}=\boldsymbol{X}_2$，故有：

$$\begin{cases}\lambda\boldsymbol{X}_1=0,\\ \lambda\boldsymbol{X}_2=p\boldsymbol{X}_3,\\ \lambda\boldsymbol{X}_3=2\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_4+(p-1)\boldsymbol{X}_3,\\ \lambda\boldsymbol{X}_4=p\boldsymbol{X}_3,\end{cases}$$

将上式转化成矩阵等式 $(\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}'=0$，其中 $\boldsymbol{X}'=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)^{\mathrm{T}}$，且 $p+q=n-4$，故有：

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&p&0\\0&2&p-1&1\\0&0&p&0\end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{f}_1(x;n-4,0)=\det(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I})$，可以得到：$\boldsymbol{f}_1(x;n-4,0)=x[x^3-(n-5)x^2+12x-3nx]$，则 λ 为 $\boldsymbol{f}_1(x;n-4,0)=0$ 的最小根。

$x=-2.5$ 时，则有 $\boldsymbol{f}_1(-2.5;p,q)=575/16-(25/8)n$。当 $n\geqslant12$ 时，则有 $\boldsymbol{f}_1(-2.5;p,q)<0$，从而 $\lambda<-2.5$。

2)若 $q\geqslant 1$,由式(2),记 $\boldsymbol{X}_{v2}=\boldsymbol{X}_{v6}=\boldsymbol{X}_2$,可得:

$$\begin{cases}\lambda\boldsymbol{X}_1=q\boldsymbol{X}_5,\\ \lambda\boldsymbol{X}_2=p\boldsymbol{X}_3+q\boldsymbol{X}_5,\\ \lambda\boldsymbol{X}_3=2\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{X}_4+q\boldsymbol{X}_5+(p-1)\boldsymbol{X}_3,\\ \lambda\boldsymbol{X}_4=p\boldsymbol{X}_3,\\ \lambda\boldsymbol{X}_5=\boldsymbol{X}_1+2\boldsymbol{X}_2+p\boldsymbol{X}_3+(q-1)\boldsymbol{X}_5,\end{cases}$$

将上式转化成矩阵等式$(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X}'=0$,其中 $\boldsymbol{X}'=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4,\boldsymbol{X}_5)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&q\\0&0&p&0&q\\0&2&p-1&1&q\\0&0&p&0&0\\1&2&p&0&q-1\end{bmatrix},$$

令 $\boldsymbol{f}_2(x;p,q)=\det(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I})$,可以得到:

$$\boldsymbol{f}_2(x;p,q)=x^5+(2-p-q)x^4-(4p+4q-1)x^3+(2pq-3p-3q)x^2+5qpx,$$

当 $x=-2.5$ 时,则有 $\boldsymbol{f}_2(-2.5;p,q)=-3.906\ 25-120.312\ 5(p+q)+15.625$,则 λ 是 $\boldsymbol{f}_2(x;p,q)=0$ 的最小根。当 $n\geqslant 12$ 时,$p+q=n-4\geqslant 8$,此时 $\boldsymbol{f}_2(-2.5;p,q)<0$,故 $\lambda<-2.5$。

当 $p\leqslant q+2$ 时,$x<-2.5$ 时,则有 $\boldsymbol{f}_2(x;p-1,q+1)-\boldsymbol{f}_2(x;p,q)=(p-q-1)x(2x+5)<0$,由于 λ 是方程 $\boldsymbol{f}_2(x;p,q)=0$ 的最小根,从而当 $\lambda<-2.5$ 时,有 $\boldsymbol{f}_2(x;p,q)=0$,$\boldsymbol{f}_2(\lambda;p-1,q+1)<0$,则可得:

$$\lambda[\boldsymbol{G}(p,q)^C]>\lambda[\boldsymbol{G}(p-1,q+1)^C]>\cdots>\lambda[\boldsymbol{G}(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)^C]。$$

3)下面讨论 $\lambda[\boldsymbol{G}(n-4,0)^C]$与 $\lambda[\boldsymbol{G}(n-5,1)]^C$ 的大小。

设 $g(x)=-x\boldsymbol{f}_1(x;n-4,0)=-x^5+(n-5)x^4-12x^3+3nx^3$,则当 $n\geqslant 12$,$x<-2.5$ 时,

$$g(x)-\boldsymbol{f}_2(x;n-5,1)=-x^3+(n-7)x^2+(4n-19)x-(n-5)>0,$$

由此可知,$\lambda[\boldsymbol{G}(n-4,0)^C]<-2.5$,$\lambda[\boldsymbol{G}(n-5,1)^C]<-2.5$,即 $\lambda[\boldsymbol{G}(n-4,0)^C]>\lambda[\boldsymbol{G}(n-5,1)^C]$。

综上可知结论成立。

定理 2 给定正整数 $n(n\geqslant 12)$,对于任意的图 $\boldsymbol{G}\in\Omega_n$,有 $\lambda(\boldsymbol{G}^C)\geqslant\lambda(\boldsymbol{G}(p,q)^C)$。

证明 对于任意的图 $\boldsymbol{G}\in\Omega_n$,它的外圈必为 $\boldsymbol{C}_3$,外圈上的点依次为 v_1,v_2,v_4,$\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{G}^C$ 的第一特征向量。不妨设 $\boldsymbol{X}_{v1}\geqslant\boldsymbol{X}_{v2}\geqslant\boldsymbol{X}_{v4}$,若悬挂点在 $\boldsymbol{X}$ 中对应的值大于等于零,则删除该边连接点 v_1,若悬挂点在 $\boldsymbol{X}$ 中对应的值小于零,则删除该边连接点 v_4,最终所得悬挂点只悬挂在圈上两点,得图 $\boldsymbol{G}(p,q)$,故须证 $\lambda(\boldsymbol{G}^C)\geqslant\lambda(\boldsymbol{G}(p,q)^C)$。

根据以上方法,可得:

$$\boldsymbol{X}_i\geqslant 0,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_1\geqslant\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_2\geqslant\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_4,$$
$$\boldsymbol{X}_i<0,\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_1<\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_2<\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_4,$$

所以,由式(1)可知:

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{X}=2\sum_{uv\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G})}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v\leqslant 2\sum_{uv\in\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}(p,q))}\boldsymbol{X}_u\boldsymbol{X}_v=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}(p,q))\boldsymbol{X},$$

故有:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}^C)\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}(p,q)^C)\boldsymbol{X}=\\&\qquad\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}))\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}(p,q))\boldsymbol{X}=\\&\qquad\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}(p,q))\boldsymbol{X}=\\&\qquad\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}(p,q))\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G})\boldsymbol{X}\geqslant 0,\end{aligned}$$

从而有:$\lambda(\boldsymbol{G}^C)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}^C)\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{G}(p,q)^C)\boldsymbol{X}$。

通过式(3)可得:$\lambda(\boldsymbol{G}^C)\geqslant\lambda(\boldsymbol{G}(p,q)^C)$。

定理 3 给定一个正整数 $n(n\geqslant 12)$,对于任意的 $\boldsymbol{G}\in\Omega_n^C$,有:$\lambda(\boldsymbol{G})\geqslant\lambda(\boldsymbol{G}(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)^C)$ 等号成立,当且仅当 $\boldsymbol{G}^C=\boldsymbol{G}(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)$。

3 结 论

本文讨论了给定阶数为 n 且具有 $n-4$ 个悬挂点三圈图补图图类中邻接矩阵的最小特征值，在只考虑简单无向连通图的基础上，从补图的结构出发研究图的最小特征值，从而刻画了当给定阶数为 n 且具有 $n-4$ 个悬挂点的三圈图补图图类中邻接矩阵的最小特征值为 $\lambda(\boldsymbol{G}(\lceil (n-4)/2 \rceil, \lfloor (n-4)/2 \rfloor)^C)$ 时，其邻接矩阵的最小特征值达到极小的唯一图，并为研究此类图最小特征值达到极小的唯一图和后续补图图类中邻接矩阵的最小特征征值提供了一定的理论依据。

参考文献/References：

[1] BELL F K, CVETKOVIC D, ROWLINSON P, et al. Graphs for which the least eigenvalues is minimal, I[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429(2): 234-241.

[2] BELL F K, CVETKOVIC D, ROWLINSON P, et al. Graphs for which the least eigenvalues is minimal, II [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429(8/9): 2168-2176.

[3] FAN Yizheng, WANG Yi, GAO Yubin. Minimizing the least eigenvalues of unicyclic graphs with application to spectral spread[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429: 577-588.

[4] HAEMERS W H. Interlacing eigenvalues and graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1995, 226(95): 593-616.

[5] TAN Yingying, FAN Yizheng. The vertex(edge) independence number, vertex(edge) cover number and the least eigenvalue of a graph [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433 (4): 790-795.

[6] FAN Yizheng, ZHANG Feifei, WANG Yi. The least eigenvalue of the complements of trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 435(9):2150-2155.

[7] WANG Yi, FAN Yizheng, LI Xixin, et al. The least eigenvalue of graphs whose complements are unicyclic[J]. Discussiones Mathematics Graph Theory, 2013, 35(2):1375-1379.

[8] YU Guidong, FAN Yizheng, WANG Yi. The least eigenvalue of graphs[J]. Journal of Mathematical Research with Applications, 2012, 32(6): 659-665.

[9] HOU Xiaohua, QU Hui. The least eigenvalue for unicyclic graphs with given independence number[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, 2015, 48(4): 73-79.

[10] FAN Dandan, CHEN Ya, MAMATABDULLA A, et al. Tricyclic graph whose least eigenvalue is minimum[J]. Journal of Qufu Normal University, 2018, 44(1): 11-16.

[11] YE Miaolin, FAN Yizheng, LIANG Dong. The least eigenvalue of graphs with given connectivity[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 430(4): 1375-1379.

[12] YU Guidong, FAN Yizheng, WANG Yi. Quadratic forms on graphs with application to minimizing the least eigenvalue of signless Laplacian over bicyclic graphs[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2014, 27(2): 213-236.

[13] YU Guidong, FAN Yizheng. The least eigenvalue of graphs whose complements are 2-vertex or 2-edge connected[J]. Operations Research Transactions, 2013, 17(2):81-88.

[14] YU Guidong, FAN Yizheng, YE Miaolin. The least signless Laplacian eigenvalue of the complements of unicyclic graphs[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 306(1):13-21.

[15] LI Shuchao, WANG Shujing. The least eigenvalue of the signless Laplacian of the complements of trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 436(7): 2398-2405.

[16] PETROVIC M, BOROVICANIN B, ALEKSIC T. Bicyclic graphs for which the least eigenvalue is minimum[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 430(4):1328-1335.

[17] 李雨，薛婷婷，孙威，等. 一种特殊补图的最小特征值研究[J].廊坊师范学院学报(自然科学版)，2017，17(2)：5-12.
LI Yu, XUE Tingting, SUN Wei, et al. Study on the minimum eigenvalue of a special complement graph[J]. Journal of Langfang Teachers University (Natural Science Edition), 2017, 17(2): 5-12.

[18] 王礼想，芦兴庭.具有 $n-3$ 个悬挂点的单圈图补图的最小特征值[J].安庆师范大学学报(自然科学版)，2017，23(4)：22-24.
WANG Lixiang, LU Xingting. Least eigenvalue of the complement of unicyclic graphs with $n-3$ pendent vertexes[J]. Journal of Anqing Normal University (Natural Science Edition), 2017, 23(4): 22-24.

[19] 芦兴庭，余桂东，严亚伟，等.补图是独立数为 $n-2$ 的双圈图的最小特征值[J].安庆师范大学学报(自然科学版)，2018，24(1)：8-11.
LU Xingting, YU Guidong, YAN Yawei, et al. Least eignvalue of graphs whose complements are bicyclic graphs with independence number $n-2$ [J].Journal of Anqing Normal University (Natural Science Edition), 2018, 24(1): 8-11.

[20] 孙威，余桂东，芦兴庭，等.一类特殊图的最小特征值[J].安庆师范大学学报(自然科学版)，2017，23(3)：32-34.
SUN Wei, YU Guidong, LU Xingting, et al. The least eignvalue of the special graphs[J]. Journal of Anqing Normal University (Natural Science Edition), 2017, 23(3): 32-34.

[21] 余桂东，孙威，芦兴庭.补图具有悬挂点且连通的图的最小特征值[J].运筹学学报，2019，23(1)：90-96.
YU Guidong, SUN Wei, LU Xingting. The least eigenvalue of the graphs whose complement are connected and have pendant vertices[J]. Operations Research Transactions, 2019, 23(1): 90-96.