第 40 卷第 6 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol.40,No.6
2019 年 12 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Dec. 2019

文章编号:1008-1542(2019)06-0469-08　　开放科学(资源服务)标识码(OSID):

无穷区间上二阶三点 q-差分方程边值问题解的存在性

禹长龙,张博雅,韩获德

(河北科技大学理学院,河北石家庄　050018)

摘　要:为了拓展非线性量子差分方程边值问题的基本理论,研究了一类无穷区间上非线性项含有一阶 q-微分的二阶三点非线性 q-差分方程边值问题解的存在性。首先,给出并证明了含有无穷限广义积分的二重 q-积分的交换积分次序公式;其次,计算出了无穷区间上二阶三点线性 q-差分方程边值问题的 Green 函数,并研究了 Green 函数的性质;再次,在抽象空间上构造积分算子,然后运用 Leray-Schauder 连续定理,获得了无穷区间上二阶三点非线性 q-差分方程边值问题解的存在性结果;最后给出实例。实例验证表明所得结果是正确的。研究结果对量子微积分的发展及其在数学物理等领域的应用都有着重要的意义。

关键词:非线性泛函分析;q-差分方程;无穷区间;三点边值问题;Leray-Schauder 连续定理

中图分类号:O175.8　　文献标志码:A　　**doi**:10.7535/hbkd.2019yx06003

Existence of solutions to boundary value problems of second-order three-point q-difference equations on a infinite interval

YU Changlong, ZHANG Boya, HAN Huode

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract:In order to extend the basic theory of boundary value problems for nonlinear quantum difference equations,the existence of solutions for a class of second order three-point nonlinear q-differential equations with a first order q-differential on a nonlinear interval is studied. Firstly, changing the order of integration formula of double q-integral with infinite limit generalized integral is given and proved. Secondly, the Green function of the boundary value problem of second-order three-point linear q-difference equation on the infinite interval is calculated and the property of Green function is studied. Next, the integral operator T is constructed on the abstract space, and the Leray-Schauder continuous theorem is used to obtain the existence of the solution of the boundary value problems for the second-order three-point nonlinear q-difference equation on the infinite interval.

收稿日期:2019-05-14;修回日期:2019-09-12;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金(11201112);河北省自然科学基金(A201520811);河北省高等学校科学技术研究项目(QN2017065)

第一作者简介:禹长龙(1978—),男,河北阳原人,副教授,硕士,主要从事微分方程边值问题、量子差分方程边值问题以及数值计算等方面的研究。

E-mail:changlongyu@126.com

禹长龙,张博雅,韩获德.无穷区间上二阶三点 q-差分方程边值问题解的存在性[J].河北科技大学学报,2019,40(6):469-476.

YU Changlong,ZHANG Boya,HAN Huode.Existence of solutions to boundary value problems of second-order three-point q-difference equations on a infinite interval[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2019,40(6):469-476.

Finally, an example is given to illustrate the validity of the results. The research results have important significance for the development of quantum calculus and its application in the fields of mathematical physics.

Keywords: nonlinear functional analysis; q-difference equation; infinite interval; three-point boundary value problem; Leray-Schauder continuation theorem

最早起源于20世纪初,由JACKSON提出的量子微积分,又名q-微积分,是一类无极限的微积分,参见文献[1—2]。由量子力学的知识可知,时间和空间是不连续的,不能任意分割,也不存在小于普朗克尺度的量,这足以说明用经典微积分描述的物理现象与真实世界必然会存在偏差。此时,量子微积分应运而生。q-微积分被广泛地应用于数学、物理等科学领域,如宇宙弦与黑洞、适形量子力学、核和高能物理、数值理论、组合、正交多项式、基本超几何函数和其他科学的量子理论、力学和相对论等领域[3-9]。

近年来,量子差分方程(q-差分方程)边值问题颇受专家、学者们的关注,日益成为许多学者研究的课题。其中,非线性q-差分方程边值问题可以广泛地应用于各个研究领域,并且已经得到了一些有限区间上非线性q-差分方程边值问题解的存在性和唯一性理论,参见文献[10—15]及其参考文献。

由于Arzela-Ascoli定理在无穷区间上是失效的,所以对无穷区间上边值问题的研究更加复杂,参见文献[16—20]及其参考文献。2006年,LIAN等[21]研究了半线性二阶三点边值问题:

$$\begin{cases}x''(t)+f(t,x(t),x'(t))=0, \quad 0<t<+\infty,\\ x(0)=ax(\eta), \quad \lim\limits_{t\to+\infty}x'(t)=0\end{cases}$$

的可解性,其中$\alpha\in R,\alpha\neq1,\eta\in(0,+\infty)$。

目前,无穷区间上q-差分方程边值问题的研究结果几乎没有。基于上述基础,笔者研究一类无穷区间上二阶三点非线性q-差分方程边值问题:

$$\begin{cases}D_q^2x(t)+f(t,x(t), \quad D_qx(t))=0, \quad 0<t<+\infty,\\ x(0)=\alpha x(\eta), \quad \lim\limits_{t\to+\infty}D_qx(t)=0\end{cases} \tag{1}$$

解的存在性,其中$f:[0,+\infty)\times R^2\mapsto R$是连续函数,$\alpha\in R,\alpha\neq1,\eta\in(0,+\infty),q\in(0,1)$。

本文中$P=\int_0^{+\infty}p(s)\mathrm{d}_qs$,$P_1=\int_0^{+\infty}sp(s)\mathrm{d}_qs$,$Q=\int_0^{+\infty}q(s)\mathrm{d}_qs$。考虑空间为$C^1_{q,\infty}[0,+\infty)=\{x\in C^1[0,+\infty),\lim\limits_{t\to+\infty}x(t),\lim\limits_{t\to+\infty}D_qx(t)$存在$\}$,且$\|x\|=\max\{\|x\|_\infty,\|D_qx\|_\infty\}$,其中,$\|\cdot\|_\infty$为无穷区间上的上确界范数。记$L^1_q[0,+\infty)=\{x:[0,+\infty)\to R,x$可积$\}$,其范数为$\|x\|_{L^1_q}=\int_0^{+\infty}|x(t)|\mathrm{d}_qt$。

1 预备知识

首先给出本文用到的定义及相关引理。

定义1[22] 对任意的$0<q<1$,定义函数f的q-导数为$D_qf(t)=\dfrac{f(t)-f(qt)}{t(1-q)}$,$D_qf(0)=\lim\limits_{t\to0}D_qf(t)$。记$\lim\limits_{q\to1^-}D_qf(t)=f'(t)$。

定义2[22] 若$D_q^nf(t):=D_qD_q^{n-1}f(t),n\in N$,称$D_q^nf(t)$为函数$f$的$n$阶$q$-导数,其中,$D_q^0f(t):=f(t)$。

定义3[22] 定义函数f在区间$[0,b]$的q-积分为

$$I_qf(t):=\int_0^xf(t)\mathrm{d}_qt:=(1-q)x\sum_{j=0}^{\infty}q^jf(q^jx),x\in[0,b],$$

若$a\in[0,b]$,且f在$[0,b]$有定义,则

$$\int_a^bf(t)\mathrm{d}_qt:=\int_0^bf(t)\mathrm{d}_qt-\int_0^af(t)\mathrm{d}_qt。$$

特别地,$I_q^0f(t):=f(t)$,$I_q^nf(t):=I_qI_q^{n-1}f(t),n\in N$。

显然,$D_qI_qf(t)=f(t)$。如果函数f在$x=0$连续,则$I_qD_qf(t)=f(t)-f(0)$。

定义 4[22]　定义函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上的非正常 q- 积分为$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}_q x=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\mathrm{d}_q x$,$0<q<1$,或者$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}_q x=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)\mathrm{d}_q x$,$q>1$,其中$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\mathrm{d}_q x=(1-q)q^j f(q^j)$。

引理 1[22]　若 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数且 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}_q x=F(b)-F(a),\quad 0\leqslant a<b\leqslant+\infty。$$

引理 2　对任意的 $0<q<1$,f 在 $x=0$ 处连续,则

$$\int_0^t\int_r^{+\infty} f(s)\mathrm{d}_q s\,\mathrm{d}_q r=\int_0^{+\infty} tf(s)\mathrm{d}_q s-\int_0^t(t-qs)f(s)\mathrm{d}_q s。$$

证明　运用定义 3,定义 4 简单计算易证结论成立。

引理 3　若 $y(t),ty(t)\in L_q^1[0,+\infty)$,则线性边值问题:

$$\begin{cases}D_q^2 x(t)+y(t)=0, & 0<t<+\infty,\\ x(0)=\alpha x(\eta), & \lim\limits_{t\to+\infty} D_q x(t)=0\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解 $x(t)=\int_0^{+\infty} G(t,qs)y(s)\mathrm{d}_q s$,

其中:

$$G(t,qs)=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}qs, & 0\leqslant qs\leqslant\min\{\eta,t\}<+\infty,\\ \alpha(qs-t)+t, & 0\leqslant t\leqslant qs\leqslant\eta<+\infty,\\ \alpha(\eta-qs)+qs, & 0<\eta\leqslant qs\leqslant t<+\infty,\\ \alpha(\eta-t)+t, & 0<\max\{\eta,t\}\leqslant qs<+\infty。\end{cases}\tag{3}$$

证明　对 q- 差分方程(2) 的两边从 t 到 $+\infty$ 积分且由$\lim\limits_{t\to+\infty} D_q x(t)=0$ 得:

$$D_q x(t)=\int_t^{+\infty} y(s)\mathrm{d}_q s,\tag{4}$$

再对式(4) 两边从 0 到 t 积分且由引理 2 得:

$$x(t)=\int_0^{+\infty} ty(s)\mathrm{d}_q s-\int_0^t(t-qs)y(s)\mathrm{d}_q s+x(0),$$

又由 $x(0)=\alpha x(\eta)$,可得:

$$x(0)=\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\int_0^{+\infty}\eta y(s)\mathrm{d}_q s-\int_0^{\eta}(\eta-qs)y(s)\mathrm{d}_q s\right),$$

于是有:

$$x(t)=\int_0^{+\infty} ty(s)\mathrm{d}_q s-\int_0^t(t-qs)y(s)\mathrm{d}_q s+\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\int_0^{+\infty}\eta y(s)\mathrm{d}_q s-\int_0^{\eta}(\eta-qs)y(s)\mathrm{d}_q s\right)=\int_0^{+\infty} G(t,qs)y(s)\mathrm{d}_q s,\tag{5}$$

其中:$G(t,qs)$ 为边值问题(2) 对应的 Green 函数,结论得证。

注 1　当 $q\to1$ 时,退化为微分方程边值问题:

$$\begin{cases}x''(t)+y(t)=0,\\ x(0)=\alpha x(\eta), & \lim\limits_{t\to+\infty} x'(t)=0\end{cases}$$

的 Green 函数:

$$G(t,s)=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}s, & 0\leqslant s\leqslant\min\{\eta,t\}<+\infty,\\ \alpha(s-t)+t, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant\eta<+\infty,\\ \alpha(\eta-s)+s, & 0<\eta\leqslant s\leqslant t<+\infty,\\ \alpha(\eta-t)+t, & 0<\max\{\eta,t\}\leqslant s<+\infty。\end{cases}$$

引理4 $\forall t,s\in[0,+\infty)$,有:

$$|G(t,qs)|\leqslant\begin{cases}\max\{\dfrac{\alpha\eta}{\alpha-1},s\}, & \alpha<0,\\ \dfrac{s}{1-\alpha}, & 0\leqslant\alpha<1,\\ \max\left\{\dfrac{\alpha qs}{\alpha-1},\dfrac{\alpha\eta}{\alpha-1},s\right\}, & \alpha>1。\end{cases}$$

证明 对 $\forall s\in[0,+\infty)$,$G(t,qs)$ 关于 t 单调递增,于是有:

$$\min\left\{\frac{\alpha qs}{1-\alpha},\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}\right\}\leqslant G(t,qs)\leqslant G(qs,qs)\leqslant\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}qs, & qs\leqslant\eta,\\ \alpha(\eta-qs)+qs, & qs\geqslant\eta。\end{cases}$$

故有:

$$\min\left\{\frac{\alpha qs}{1-\alpha},\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}\right\}\leqslant G(t,qs)\leqslant s,\quad \alpha<0,$$

$$\min\left\{\frac{\alpha qs}{1-\alpha},\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}\right\}\leqslant G(t,qs)\leqslant \frac{s}{1-\alpha},\quad 0\leqslant\alpha<0,$$

$$\min\left\{\frac{\alpha qs}{1-\alpha},\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}\right\}\leqslant G(t,qs)\leqslant s,\quad \alpha>0。$$

命题得证。

引理5 Green函数 $G(t,qs)$ 满足:

$$\lim_{t\to+\infty}G(t,qs)=\bar{G}(s)=\frac{1}{1-\alpha}\begin{cases}qs, & qs\leqslant\eta,\\ \alpha(\eta-qs)+qs, & qs\geqslant\eta。\end{cases}$$

定义5 函数 $f:[0,+\infty)\times R^2\mapsto R$ 称为S-Caratheodory函数,当且仅当满足以下条件:

1) $\forall(u,v)\in R^2,t\mapsto f(t,u,v)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可测;

2) $\forall t\in[0,+\infty),(u,v)\mapsto f(t,u,v)$ 在 R^2 上连续;

3) $\forall r>0,\exists\varphi_r(t),t\varphi_r(t)\in L_q^1[0,+\infty),\varphi_r(t)>0$,使得当 $\max\{|u|,|v|\}\leqslant r$ 时,$\forall t\in[0,+\infty)$,有 $|f(t,u,v)|\leqslant\varphi_r(t)$。

定理1[23] 设 $M\subset C_\infty[0,+\infty)=\{x\in C[0,+\infty),\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)$ 存在$\}$,若满足以下条件:

a) M 在 $C_\infty[0,+\infty)$ 上一致有界;

b) M 中的所有函数在 $[0,+\infty)$ 的任意紧区间上等度连续;

c) M 中所有函数等度收敛,即 $\forall\varepsilon>0,\exists T=T(\varepsilon)>0,\forall t>T,f\in M$ 有 $|f(t)-f(+\infty)|<\varepsilon$。

则 M 在 X 中是相对紧的。

2 主要结论

考虑空间 $X=\{x\in C_{q,\infty}^1[0,+\infty),x(0)=\alpha x(\eta),\lim\limits_{t\to+\infty}D_qx(t)=0\}$,定义算子 $T:X\times[0,1]\to X$ 为

$$T(x,\lambda)(t)=\lambda\int_0^{+\infty}G(t,qs)f(s,x(s),D_qx(s))\mathrm{d}_qs,\quad 0\leqslant t<+\infty。\tag{6}$$

引理6 设 $f:[0,+\infty)\times R^2\to R$ 是S-Caratheodory函数,则 $\forall\lambda\in[0,1]$,$T(x,\lambda)$ 在 X 上是全连续的。

证明 首先,证明 $Tx\in X$。对 $\forall x\in X$,则 $\exists r>0$,使得 $\|x\|<r$。对 $\forall\lambda\in[0,1]$,有:

$$T(x,\lambda)(t)=\lambda\int_0^{+\infty}G(t,qs)f(s,x(s),D_qx(s))\mathrm{d}_qs\leqslant \int_0^{+\infty}|G(t,qs)|\varphi_r(s)\mathrm{d}_qs<+\infty,\quad t\in[0,+\infty)。$$

由于 $G(t,qs)$ 关于 t 是连续的,根据控制收敛定理,得:

$$|T(x,\lambda)(t_1)-T(x,\lambda)(t_2)|\leqslant\lambda\int_0^{+\infty}|G(t_1,qs)-G(t_2,qs)||f(s,x(s),D_qx(s))|\mathrm{d}_qs\leqslant \lambda\int_0^{+\infty}|G(t_1,qs)-G(t_2,qs)|\varphi_r(s)\mathrm{d}_qs\to 0,\quad (t_1\to t_2),\tag{7}$$

并且

$$\begin{aligned}&|D_qT(x,\lambda)(t_1)-D_qT(x,\lambda)(t_2)|=\\&\lambda\left|\int_{t_1}^{t_2}f(s,x(s),D_qx(s))\mathrm{d}_qs\right|\leqslant\\&\lambda\int_{t_1}^{t_2}|f(s,x(s),D_qx(s))|\mathrm{d}_qs\leqslant\\&\int_{t_1}^{t_2}\varphi_r(s)\mathrm{d}_qs\to\\&0,\quad(t_1\to t_2),\end{aligned}\tag{8}$$

其中，$0\leqslant t_1,t_2<+\infty$。从而，$Tx\in C^1[0,+\infty)$。显然，

$$T(x,\lambda)(0)=\alpha T(x,\lambda)(\eta),$$

$$\lim_{t\to+\infty}D_qT(x,\lambda)(t)=\lim_{t\to+\infty}\int_t^{+\infty}f(s,x(s),D_qx(s))\mathrm{d}_qs=0,$$

因此，$T(x,\lambda)(t)\in X$。

其次，证明 $T(x,\lambda)$ 在 X 中等度收敛。设 $\forall x_n\in X$，当 $n\to+\infty$ 时，$x_n\to x$。下面证明对 $\forall\lambda\in[0,1]$，当 $n\to+\infty$ 时，$T(x_n,\lambda)\to T(x,\lambda)$。由于 f 为 S-Caratheodory 函数，则有：

$$\left|\int_0^{+\infty}\bar{G}(s)(f(s,x_n(s),D_qx_n(s))-f(s,x(s),D_qx(s)))\mathrm{d}_qs\right|\leqslant2\int_0^{+\infty}|\bar{G}(s)|\varphi_{r0}(s)\mathrm{d}_qs<+\infty,$$

其中，

$$r_0>0,r_0\in R,\text{且}\max\{\max_{n\in N\setminus\{0\}}\|x_n\|,\|x\|\}\leqslant r_0,$$

于是有：

$$\begin{aligned}&|T(x_n,\lambda)(+\infty)-T(x,\lambda)(+\infty)|=\\&\left|\lambda\int_0^{+\infty}\bar{G}(s)(f(s,x_n(s),D_qx_n(s))-f(s,x(s),D_qx(s)))\mathrm{d}_qs\right|\leqslant\\&\lambda\int_0^{+\infty}|\bar{G}(s)||f(s,x_n(s),D_qx_n(s))-f(s,x(s),D_qx(s))|\mathrm{d}_qs\to\\&0,\quad(n\to+\infty),\end{aligned}\tag{9}$$

并且

$$\begin{aligned}&|T(x_n,\lambda)(t)-T(x_n,\lambda)(+\infty)|=\\&\lambda\left|\int_0^{+\infty}(G(t,qs)-\bar{G}(s))f(s,x_n(s),D_qx_n(s))\mathrm{d}_qs\right|\leqslant\\&\lambda\int_0^{+\infty}|G(t,qs)-\bar{G}(s)|\varphi_{r0}(s)\mathrm{d}_qs\to\\&0,\quad(t\to+\infty),\end{aligned}\tag{10}$$

另外，

$$\begin{aligned}&|D_qT(x_n,\lambda)(t)-D_qT(x_n,\lambda)(+\infty)|\leqslant\int_t^{+\infty}|f(s,x_n(s),D_qx_n(s))|\mathrm{d}_qs\leqslant\\&\int_t^{+\infty}\varphi_{r0}(s)\mathrm{d}_qs\to\\&0,\quad(t\to+\infty)。\end{aligned}\tag{11}$$

同理可得：

$$|T(x,\lambda)(t)-T(x,\lambda)(+\infty)|\to0,\quad(t\to+\infty),\tag{12}$$

$$|D_qT(x,\lambda)(t)-D_qT(x,\lambda)(+\infty)|\to0,\quad(t\to+\infty)。\tag{13}$$

对 $\forall T_0\in R^+,T_0<+\infty$，当 $t\in[0,T_0]$ 时，有：

$$\begin{aligned}&|T(x_n,\lambda)(t)-T(x,\lambda)(t)|\leqslant\\&\int_0^{+\infty}|G(t,qs)||f(s,x_n(s),D_qx_n(s))-f(s,x(s),D_qx(s))|\mathrm{d}_qs\to\\&0,\quad(n\to+\infty),\end{aligned}\tag{14}$$

及

$$
\begin{aligned}
&| D_qT(x_n,\lambda)(t)-D_qT(x,\lambda)(t) | \leqslant \\
&\qquad \int_0^{+\infty} | f(s,x_n(s),D_qx_n(s))-f(s,x(s),D_qx(s)) | \mathrm{d}_qs \to \\
&\qquad 0,\quad (n\to+\infty)。
\end{aligned}
\tag{15}
$$

结合式(6)— 式(15),可以看出 $T(\cdot,\lambda)$ 是连续的。设 $B\subset X$ 是一个有限子集,容易证明 TB 是一致有界的。类似证明式(7)、式(8)、式(12)和式(13)的方法,可以证明 TB 是等度连续且等度收敛的。因此,通过定理1,算子 $T(\cdot,\lambda):X\times[0,1]\to X$ 是全连续的。

定理2 设 $f:[0,+\infty)\times R^2\to R$ 是 S-Caratheodory 函数。若 $\exists\, p(t),q(t),r(t)\in L_q^1[0,+\infty)$, $tp(t),tq(t),tr(t)\in L_q^1[0,+\infty)$,使得 $\forall t\in[0,+\infty)$, $\forall(u,v)\in R^2$,有:$| f(t,u,v) |\leqslant p(t)| u |+q(t)| v |+r(t)$,且

$$
\max\{\eta P+P_1+Q,\alpha(1-\eta P-P_1)+P_1\}<1,\quad \alpha<0,
$$

$$
\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}P+P_1+Q<1,\quad 0\leqslant\alpha<1,
$$

$$
\max\left\{\frac{\alpha\eta}{\alpha-1}P+P_1+Q,\frac{\alpha(qR_1+\eta R)}{\alpha-1}+P\right\}<1,\quad \alpha>1,
$$

则边值问题(1)至少有1个解。

证明 由引理3,当且仅当 x 是算子 $T(\cdot,\lambda)$ 的一个不动点时,$x\in X$ 是边值问题(1)的解。显然,$\forall x\in X$,有 $T(x,0)=0$。由 Leray-Schauder 连续定理可知,只需证明 $\forall\lambda\in[0,1]$,算子 $T(\cdot,\lambda)$ 在闭集 X 中的不动点不依赖于 λ 即可。

下面证明 $T(\cdot,\lambda)$ 的不动点有一个不依赖于 λ 的先验界 M。假设 $x=T(x,\lambda)$,并记

$$
Q_1=\int_0^{+\infty} sq(s)\mathrm{d}_qs,\quad R=\int_0^{+\infty} r(s)\mathrm{d}_qs,\quad R_1=\int_0^{+\infty} sr(s)\mathrm{d}_qs。
$$

情形1 当 $\alpha<0$ 时,$\forall x\in X$,有 $x(0)x(\eta)\leqslant 0$,因此,$\exists\, t_0\in[0,\eta]$,使得 $x(t_0)=0$,则有:

$$
| x(t) |\leqslant\int_{t_0}^{t} | D_qx(s) | \mathrm{d}_qs\leqslant(t+\eta)\| D_qx \|_\infty,\quad t\in[0,+\infty),
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
\| D_qx \|_\infty &\leqslant \| \lambda f(t,x,D_qx) \|_{L_q^1}\leqslant\| f(t,x,D_qx) \|_{L_q^1}\leqslant \\
&\quad \| p(t) | x(t) |+q(t) | D_qx |+r(t) \|_{L_q^1}\leqslant \\
&\quad (\eta P+P_1+Q)\| D_qx \|_\infty+R,
\end{aligned}
$$

即

$$
\| D_qx \|_\infty\leqslant\frac{R}{1-\eta P-P_1-Q}:=M'_1。
$$

同理可得:

$$
\begin{aligned}
&| x(t) |\leqslant\lambda\left| \int_0^{+\infty} G(t,qs)f(s,x(s),D_qx(s))\mathrm{d}_qs \right|\leqslant \\
&\quad \int_0^{+\infty}\left| \left(\frac{\alpha\eta}{\alpha-1}+s\right)f(s,x(s),D_qx(s))\right|\mathrm{d}_qs\leqslant \\
&\quad \left(\frac{\alpha\eta P}{\alpha-1}+P_1\right)\| x \|_\infty+\left(\frac{\alpha\eta Q}{\alpha-1}+Q_1\right)M'_1+\frac{\alpha\eta R}{\alpha-1}+R_1,\quad t\in[0,+\infty),
\end{aligned}
$$

即

$$
\| x \|_\infty\leqslant\frac{\alpha\eta(QM'_1+R)+(\alpha-1)(Q_1M'_1+R_1)}{\alpha(1-\eta P-P_1)+P_1-1}:=M_1,
$$

记 $M=\max\{M_1,M'_1\}$,M 与 λ 无关,则 $\| x \|\leqslant M$。

情形2 当 $0\leqslant\alpha<1$ 时,对 $\forall x\in X$ 有:

$$
| x(t) |=| ax(\eta)+\int_0^{t} D_qx(s)\mathrm{d}_qs |\leqslant\alpha | x(\eta) |+t\| D_qx \|_\infty,\quad t\in[0,+\infty),
$$

即

$$|x(t)| \leqslant \left(\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}+t\right)\|D_q x\|_\infty,\quad t\in[0,+\infty)。$$

用情形 1 的方法，得：

$$\|D_q x\|_\infty \leqslant \frac{(1-\alpha)R}{(1-\alpha)(1-P_1-Q)-\alpha\eta P}:=M'_2,$$

$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{Q_1 M'_2+R_1}{1-\alpha-P_1}:=M_2,$$

记 $M=\max\{M_2,M'_2\}$，M 与 λ 无关，则 $\|x\|\leqslant M$。

情形 3　当 $\alpha>1$ 时，对 $\forall x\in X$，得：

$$|x(t)|=\left|x(\eta)+\int_\eta^t D_q x(s)\mathrm{d}_q s\right|\leqslant \frac{1}{\alpha}|x(0)|+|t-\eta|\,\|D_q x\|_\infty,\quad t\in[0,+\infty),$$

即

$$|x(t)| \leqslant \left(\frac{\alpha\eta}{\alpha-1}+t\right)\|D_q x\|_\infty,\quad t\in[0,+\infty)。$$

同理可得：

$$\|D_q x\|_\infty \leqslant \frac{(\alpha-1)R}{(\alpha-1)(1-P_1-Q)-\alpha\eta P}:=M'_3,$$

$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{(\alpha q+\alpha-1)(Q_1 M'_3+R_1)+\alpha\eta(QM'_3+R)}{(\alpha-1)(1-P_1)-\alpha(qR_1+\alpha\eta R)}:=M_3,$$

记 $M=\max\{M_3,M'_3\}$，M 与 λ 无关，则 $\|x\|\leqslant M$。由此可知，边值问题(1) 至少有 1 个解。

3 例　子

考察边值问题：

$$\begin{cases} D_q^2 x(t)+e_q^{-\gamma t}D_q x(t)=0,\quad 0<t<+\infty, \\ x(0)=\dfrac{l-e_q^{-\gamma\eta}}{l-1}x(\eta),\quad \lim\limits_{t\to+\infty}D_q x(t)=0, \end{cases} \tag{16}$$

其中，$0<q<1$，$\gamma>1$，$l\in R$，$\alpha=\dfrac{l-e_q^{-\gamma\eta}}{l-1}<1$。

令 $p(t)=r(t)=0$，$q(t)=e_q^{-\gamma t}$，则 $Q=\int_0^{+\infty}e_q^{-\gamma s}\mathrm{d}_q s=\dfrac{1}{\gamma}<1$，$\dfrac{\alpha\eta}{1-\alpha}P+P_1+Q<1$，应用定理 2 知，边值问题(16) 至少有 1 个解。

参考文献/References：

[1] JACKSON F H. On q-functions and a certain difference operator[J]. Transactions of the Royal Society of Edinburgh，1908，46：253-281.

[2] JACKSON F H. On q-definite integrals[J]. The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics，1910，41：193-203.

[3] JACKSON F H. On q-difference equations[J]. American Journal of Mathematics，1910，32：305-314.

[4] CARMICHAEL R D. The general theory of linear q-difference equations[J]. American Journal of Mathematics，1912，34：147-168.

[5] MASON T E. On properties of the solutions of linear q-difference equations with entire function coefficients[J]. American Journal of Mathematics，1915，37：439-444.

[6] ADAMS C R. On the linear ordinary q-difference equation[J]. Annals of Mathematics，1928，30：195-205.

[7] PAGE D N. Information in black hole radiation[J].Physical Review Letters，1993，71(23)：3743-3746.

[8] YOUM D. q-deformed conformal quantum mechanics[J]. Physical Review D，2000，62(9)：276-284.

[9] ANNABY M H，MANSOUR Z S. q-Fractional Calculus and Equations[M]. Berlin：Springer，2012.

[10] AHMAD B. Boundary value problems for nonlinear third-order q-difference equations[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2011, 94:1-7.

[11] AHMAD B, NIETO J J. On nonlocal boundary value problem of nonlinear q-difference equations[J]. Advances in Difference Equation, 2012:2012-81.

[12] YU Changlong, WANG Jufang. Existence of solutions for nonlinear second-order q-difference equations with first-order q-derivatives[J]. Advances in Difference Equation, 2013:2013-124.

[13] EL-SHAHED M, HASSAN H A. Positive solutions of q-difference equation[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2010, 138: 1733-1738.

[14] AHMAD B, NTOUYAS S K. Boundary value problems for q-difference inclusions[J]. Abstract and Applied Analysis, 2011(3/4): 292860.

[15] AHMAD B, NIETO J J. Basic theory of nonlinear third-order q-difference equations and inclusions[J]. Mathematical Modelling and Analysis, 2013, 18(1): 122-135.

[16] O'REGAN D. Theory of Singular Boundary Value Problems[M]. Singapore: World Scientific, 1994.

[17] BAXLEY J V. Existence and uniqueness for nonlinear boundary value problems on infinite interval[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 147: 127-133.

[18] GUO D. Second order impulsive integro-differential equations on unbounded domains in Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis, 1999, 35: 413-423.

[19] AGARWAL R P, O'REGAN D. Fixed point theory for self maps between Fréchet spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256(2): 498-512.

[20] FRIGON M, O'REGAN D. Fixed point of cone-compressing and cone-extending operators in Fréchet spaces[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2003, 35(5): 672-680.

[21] LIAN Hairong, GE Weigao. Solvability for second-order three-point boundary value problems on a half-line[J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19(10): 1000-1006.

[22] KAC V, CHEUNG P. Quantum Calculus[M]. New York: Springer, 2002.

[23] AGARWAL R P, O'REGAN D. Infinite Interval Problems for Differential, Difference and Integral Equations[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 2001.