文章编号:1008-1542(2019)04-0301-06　　doi:10.7535/hbkd.2019yx04003

一类具有 Lévy 跳的随机三种群食物网模型

冀　星,刘桂荣

(山西大学数学科学学院,山西太原　030006)

摘　要:为了深入研究具有双参数扰动及 Lévy 跳的随机三种群食物网模型的动力学性质,首先给出了模型全局正解的存在唯一性;然后通过构造 Lyapunov 函数,并且应用 Itô 公式和 Chebyshev 不等式证明了该模型的随机最终有界性;接着利用指数鞅不等式和 Borel-Cantelli 引理分析了种群灭绝的充分条件;最后运用数值模拟验证了相应理论结果的合理性。研究结果表明,在 Lévy 噪声的影响下模型是随机最终有界的,并且较大的 Lévy 噪声可以导致种群的灭绝。研究方法在理论证明和数值模拟方面都得到了良好的预期结果,对于探究其他随机种群模型的一些问题具有一定的借鉴意义。

关键词:定性理论;食物网模型;最终有界性;灭绝性;Lévy 跳

中图分类号:O211.63　　**文献标志码**:A

A stochastic three-species food web model with Lévy jumps

JI Xing, LIU Guirong

(School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006, China)

Abstract: For a stochastic three-species food web model with double parameters perturbation and Lévy jumps, we give the existence and uniqueness of global positive solution, which is beneficial to further study its dynamic properties. Then, by constructing Lyapunov function and applying Itô′s formula and Chebyshev's inequality, it is found that the model is stochastic and ultimately bounded. Moreover, the sufficient conditions of extinction are obtained by using exponential martingale inequality and Borel-Cantelli's lemma. Finally, some numerical simulations are introduced to illustrate the rationality of the theoretical results. The results show that the model is stochastic and ultimately bounded under the influence of Lévy noise, and large Lévy noise can lead to the extinction of populations. The algorithm has obtained good results both in theory and numerical simulations, which provides certain significance for many problems of stochastic population models.

Keywords: qualitative theory; food web model; ultimate boundedness; extinction; Lévy jumps

捕食者与食饵之间的相互作用是最重要的生态现象之一。近年来,三种群捕食者-食饵模型的一些动力学性质得到了许多学者的广泛研究[1-5]。

考虑到种群系统因不可避免地受到环境白噪声的影响而受到许多关注[6-12],文献[6]建立了下列随机三

收稿日期:2019-05-09;修回日期:2019-06-17;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金(11471197)

第一作者简介:冀　星(1993—),女,山西朔州人,硕士研究生,主要从事微分方程与动力系统方面的研究。

通信作者:刘桂荣教授。E-mail:lgr5791@sxu.edu.cn

冀星,刘桂荣.一类具有 Lévy 跳的随机三种群食物网模型[J].河北科技大学学报,2019,40(4):301-306.

JI Xing, LIU Guirong. A stochastic three-species food web model with Lévy jumps [J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2019, 40(4): 301-306.

种群食物网模型：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1(t)=x_1(t)[r_1-a_{11}x_1(t)-a_{12}x_2(t)-a_{13}x_3(t)]\mathrm{d}t+\sigma_{11}x_1(t)\mathrm{d}B_{11}(t),\\ \mathrm{d}x_2(t)=x_2(t)[-r_2+a_{21}x_1(t)-a_{22}x_2(t)-a_{23}x_3(t)]\mathrm{d}t+\sigma_{21}x_2(t)\mathrm{d}B_{21}(t),\\ \mathrm{d}x_3(t)=x_3(t)[-r_3+a_{31}x_1(t)+a_{32}x_2(t)-a_{33}x_3(t)]\mathrm{d}t+\sigma_{31}x_3(t)\mathrm{d}B_{31}(t)。\end{cases}\tag{1}$$

其中：$x_i(t)$表示t时刻种群$x_i(i=1,2,3)$的数量；种群x_1是种群x_2和x_3的食饵，种群x_2不仅是种群x_1的捕食者，而且是种群x_3的食饵，种群x_3是种群x_1和x_2的捕食者；r_1表示种群x_1的增长率；r_2和r_3分别表示种群x_2和种群x_3的死亡率；$a_{ii}(i=1,2,3)$表示种内竞争系数；$a_{ij}(i\neq j,i,j=1,2,3)$表示种间竞争系数且$r_i$，$a_{ii}$都是正常数；$B_{ij}(t)$，$i=1,2,3$，$j=1$是定义在完备的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$上的三维标准布朗运动；$\sigma_{i1}^2(i=1,2,3)$表示噪声强度。

此外，生态系统可能会遭到突如其来的环境冲击，比如海啸、地震、非典等，这些干扰或许会在较短时间内改变种群的数量。这些扰动对种群造成的影响无法用环境白噪声来描述。为此，学者们用 Lévy 跳来描述这些随机扰动[13-18]。

基于以上分析，笔者在模型(1)的基础上加入 Lévy 跳，并且考虑环境白噪声对种群内竞争系数的影响。在本文中，环境白噪声以如下方式扰动种内竞争系数：

$$-a_{11}\to -a_{11}+\sigma_{12}\dot{B}_{12}(t),\quad -a_{22}\to -a_{22}+\sigma_{22}\dot{B}_{22}(t),\quad -a_{33}\to -a_{33}+\sigma_{32}\dot{B}_{32}(t),$$

进而建立了下列具有 Lévy 跳的随机三种群食物网模型：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1(t)=x_1(t)[r_1-a_{11}x_1(t)-a_{12}x_2(t)-a_{13}x_3(t)]\mathrm{d}t+\sigma_{11}x_1(t)\mathrm{d}B_{11}(t)+\\ \qquad\sigma_{12}x_1^2(t)\mathrm{d}B_{12}(t)+\int_Y\gamma_1(u)x_1(t-)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\\ \mathrm{d}x_2(t)=x_2(t)[-r_2+a_{21}x_1(t)-a_{22}x_2(t)-a_{23}x_3(t)]\mathrm{d}t+\sigma_{21}x_2(t)\mathrm{d}B_{21}(t)+\\ \qquad\sigma_{22}x_2^2(t)\mathrm{d}B_{22}(t)+\int_Y\gamma_2(u)x_2(t-)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\\ \mathrm{d}x_3(t)=x_3(t)[-r_3+a_{31}x_1(t)+a_{32}x_2(t)-a_{33}x_3(t)]\mathrm{d}t+\sigma_{31}x_3(t)\mathrm{d}B_{31}(t)+\\ \qquad\sigma_{32}x_3^2(t)\mathrm{d}B_{32}(t)+\int_Y\gamma_3(u)x_3(t-)\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\end{cases}\tag{2}$$

其中：$x_i(t-)$表示$x_i(t)$的左极限；σ_{i1}^2，σ_{i2}^2表示噪声强度；$B_{ij}(t)$，$i=1,2,3$，$j=1,2$是定义在完备的概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\boldsymbol{P})$上的相互独立的标准的布朗运动；$N$表示特征测度$\lambda$在$[0,\infty)$的可测子集$Y$上满足$\lambda(Y)<\infty$的泊松计数测度；$\widetilde{N}$表示$N$的补偿随机测度，$\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)=N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)-\lambda(\mathrm{d}u)\mathrm{d}t$，$\gamma_i:Y\times\Omega\to R$是关于特征测度的连续有界函数且满足$\gamma_i(u)>-1$，$i=1,2,3$。

令$R_+^3=\{(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)^{\mathrm{T}}\in R^3:x_i>0,i=1,2,3\}$。模型(2)满足初始条件$(\boldsymbol{x}_1(0),\boldsymbol{x}_2(0),\boldsymbol{x}_3(0))^{\mathrm{T}}\in R_+^3$。

为了证明本文主要结论，进一步作出如下假设：

H）存在常数$c>0$，使得$\int_Y[\ln(1+\gamma_i(u))\vee(\ln(1+\gamma_i(u)))^2]\lambda(\mathrm{d}u)<c$，$i=1,2,3$，这个假设意味着 Lévy 噪声的强度不会无限大。

1 主要结果

定理1 若假设H）成立，则对任意初值$\boldsymbol{x}(0)=(\boldsymbol{x}_1(0),\boldsymbol{x}_2(0),\boldsymbol{x}_3(0))^{\mathrm{T}}\in R_+^3$，模型(2)在$[0,+\infty)$上存在依概率1停留在$R_+^3$中的唯一的全局正解：$\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t))^{\mathrm{T}}$。

类似于文献[13]中引理2.1的证明方法，容易证明定理1的结论成立。

引理1 若假设H）成立且$0<p<1$，则对任意初值$(\boldsymbol{x}_1(0),\boldsymbol{x}_2(0),\boldsymbol{x}_3(0))^{\mathrm{T}}\in R_+^3$，存在一个常数$\widetilde{K}=\widetilde{K}(p)>0$，使得模型(2)的解$(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t))^{\mathrm{T}}$满足：$\limsup\limits_{t\to\infty}E|\boldsymbol{x}(t)|^p\leqslant\widetilde{K}$。

证明 令$V_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^p+x_2^p+x_3^p$，$x_i>0$，$i=1,2,3$。利用Itô公式[19]，有

$$\mathrm{d}[\mathrm{e}^tV_1(x_1(t),x_2(t),x_3(t))]=\mathrm{e}^t[V_1(x_1(t),x_2(t),x_3(t))+LV_1(x_1(t),x_2(t),x_3(t))]\mathrm{d}t+\\ \mathrm{e}^tQ(t)+\sum_{i=1}^3\int_Y\mathrm{e}^tx_i^p(t)[(1+\gamma_i(u))^p-1]\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u),\tag{3}$$

其中,

$$Q(t)=p\sigma_{11}x_1^p(t)\mathrm{d}B_{11}(t)+p\sigma_{12}x_1^{p+1}(t)\mathrm{d}B_{12}(t)+p\sigma_{21}x_2^p(t)\mathrm{d}B_{21}(t)+p\sigma_{22}x_2^{p+1}(t)\mathrm{d}B_{22}(t)+ p\sigma_{31}x_3^p(t)\mathrm{d}B_{31}(t)+p\sigma_{32}x_3^{p+1}(t)\mathrm{d}B_{32}(t),$$

$$\begin{aligned}LV_1(x_1,x_2,x_3)=&px_1^p(r_1-a_{11}x_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)+px_2^p(-r_2+a_{21}x_1-a_{22}x_2-a_{23}x_3)+\\&px_3^p(-r_3+a_{31}x_1+a_{32}x_2-a_{33}x_3)+0.5p(p-1)(\sigma_{11}^2x_1^p+\sigma_{12}^2x_1^{p+2}+\sigma_{21}^2x_2^p+\\&\sigma_{22}^2x_2^{p+2}+\sigma_{31}^2x_3^p+\sigma_{32}^2x_3^{p+2})+\sum_{i=1}^3\int_Y x_i^p[(1+\gamma_i(u))^p-1-p\gamma_i(u)]\lambda(\mathrm{d}u)\leqslant\\&(1+pr_1-0.5p(1-p)\sigma_{11}^2)x_1^p-pa_{11}x_1^{p+1}-0.5p(1-p)\sigma_{12}^2x_1^{p+2}+\\&(1-pr_2-0.5p(1-p)\sigma_{21}^2)x_2^p-pa_{22}x_2^{p+1}-0.5p(1-p)\sigma_{22}^2x_2^{p+2}+\\&(1-pr_3-0.5p(1-p)\sigma_{31}^2)x_3^p-pa_{33}x_3^{p+1}-0.5p(1-p)\sigma_{32}^2x_3^{p+2}+\\&a_{21}x_1x_2^p+a_{31}x_1x_3^p+a_{32}x_2x_3^p-V(x_1,x_2,x_3)\leqslant\\&F(x_1,x_2,x_3)-V_1(x_1,x_2,x_3),\end{aligned}\tag{4}$$

其中,式(4)中第 1 个不等式用到了基本不等式 $x^\delta\leqslant1+\delta(x-1),x\geqslant0,0<\delta<1$,且

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2,x_3)=&(1+pr_1-0.5p(1-p)\sigma_{11}^2)x_1^p-pa_{11}x_1^{p+1}+(0.5a_{21}+0.5a_{31})x_1^2-\\&0.5p(1-p)\sigma_{12}^2x_1^{p+2}+(1-pr_2-0.5p(1-p)\sigma_{21}^2)x_2^p-pa_{22}x_2^{p+1}+\\&0.5a_{21}x_2^{2p}+0.5a_{32}x_2^2-0.5p(1-p)\sigma_{22}^2x_2^{p+2}+(1-pr_3-0.5p(1-p)\sigma_{31}^2)x_3^p-\\&pa_{33}x_3^{p+1}+(0.5a_{31}+0.5a_{32})x_3^{2p}-0.5p(1-p)\sigma_{32}^2x_3^{p+2}。\end{aligned}$$

易知,存在常数 $K=K(p)>0$,使得对任意$(x_1,x_2,x_3)\in R_+^3$,有 $F(x_1,x_2,x_3)\leqslant K$。从而,

$$LV_1(x_1,x_2,x_3)\leqslant K-V_1(x_1,x_2,x_3),\tag{5}$$

因此,结合式(3)和式(5)得:

$$\mathrm{d}[\mathrm{e}^tV_1(x_1(t),x_2(t),x_3(t))]\leqslant K\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\mathrm{e}^tQ(t)+\sum_{i=1}^3\int_Y\mathrm{e}^tx_i^p(t)[1+\gamma_i(u))^p-1]\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)。\tag{6}$$

将式(6)两端同时从 0 到 t 积分,再取期望,有:

$$\mathrm{e}^tE[V_1(x_1(t),x_2(t),x_3(t))]\leqslant V_1(x_1(0),x_2(0),x_3(0))+K(\mathrm{e}^t-1)。$$

故$\limsup\limits_{t\to\infty}E[V_1(x_1(t),x_2(t),x_3(t))]\leqslant K$。此外,

$$|(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t))|^p\leqslant3^{\frac{p}{2}}(\max_{1\leqslant i\leqslant3}x_i^2(t))^{\frac{p}{2}}=3^{\frac{p}{2}}\max_{1\leqslant i\leqslant3}x_i^p(t)\leqslant3^{\frac{p}{2}}V_1(x_1(t),x_2(t),x_3(t)),$$

故$\limsup\limits_{t\to\infty}E|\boldsymbol{x}(t)|^p\leqslant3^{\frac{p}{2}}K=:\widetilde{K}$。因此,引理 1 成立。

定理 2　若假设 H)成立,则对任意初值$(\boldsymbol{x}_1(0),\boldsymbol{x}_2(0),\boldsymbol{x}_3(0))^{\mathrm{T}}\in R_+^3$,模型(2)是随机最终有界的。

证明　取常数 $p\in(0,1)$。对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$,令 $H=(\frac{\widetilde{K}}{\varepsilon})^{\frac{1}{p}}$。由切比雪夫不等式[19]及引理 1 可得 $\limsup\limits_{t\to\infty}P\{|\boldsymbol{x}(t)|>H\}\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}(H^{-p}[E|\boldsymbol{x}(t)|^p])\leqslant\varepsilon$,即$\limsup\limits_{t\to\infty}P\{|\boldsymbol{x}(t)|\leqslant H\}\geqslant1-\varepsilon$。从而,定理 2 得证。

引理 2[20]　设 $M(t),t\geqslant0$ 是一个局部鞅且在 $t=0$ 时消失,则:

$$\lim_{t\to\infty}\rho_M(t)<\infty\Rightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}=0\quad \text{a.s.},$$

其中,$\rho_M(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\langle M,M\rangle(s)}{(1+s)^2},t\geqslant0$。

方便起见,记 $\beta_1=r_1-0.5\sigma_{11}^2+\int_Y[\ln(1+\gamma_1(u))-\gamma_1(u)]\lambda(\mathrm{d}u)$, $\beta_i=-r_i-0.5\sigma_{i1}^2+\int_Y[\ln(1+\gamma_i(u))-\gamma_i(u)]\lambda(\mathrm{d}u),i=2,3$。显然 $\beta_i<0,i=2,3$。

定理 3　若假设 H)成立且 $\beta_1<0$,则对任意初值$(\boldsymbol{x}_1(0),\boldsymbol{x}_2(0),\boldsymbol{x}_3(0))^{\mathrm{T}}\in R_+^3$,模型(2)的解 $x(t)=(\boldsymbol{x}_1(t),\boldsymbol{x}_2(t),\boldsymbol{x}_3(t))^{\mathrm{T}}$ 满足$\lim\limits_{t\to\infty}x_i(t)=0$　a.s.,$i=1,2,3$,即种群 x_1,x_2,x_3 都趋于灭绝。

证明 令 $V_2(z)=\ln z, z\in R_+$。利用 Itô 公式，有：

$$\mathrm{d}[\ln x_1(t)]=\{\beta_1-a_{11}x_1(t)-a_{12}x_2(t)-a_{13}x_3(t)-0.5\sigma_{12}^2x_1^2(t)\}\mathrm{d}t+\sigma_{11}\mathrm{d}B_{11}(t)+\sigma_{12}x_1(t)\mathrm{d}B_{12}(t)+\int_Y\ln(1+\gamma_1(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}u)。\tag{7}$$

将式(7)两端同时从0到 t 积分，有：

$$\ln x_1(t)=\ln x_1(0)+\beta_1t-a_{11}\int_0^tx_1(s)\mathrm{d}s-a_{12}\int_0^tx_2(s)\mathrm{d}s-a_{13}\int_0^tx_3(s)\mathrm{d}s-0.5\sigma_{12}^2\int_0^tx_1^2(s)\mathrm{d}s+\sigma_{11}B_{11}(t)+\sigma_{12}\int_0^tx_1(s)\mathrm{d}B_{12}(s)+\int_0^t\int_Y\ln(1+\gamma_1(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)。\tag{8}$$

令 $M_1(t)=\sigma_{12}\int_0^tx_1(s)\mathrm{d}B_{12}(s)$，$N_1(t)=\int_0^t\int_Y\ln(1+\gamma_1(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$。一方面，由假设H）可知，$\langle N_1,N_1\rangle_t=t\int_Y[\ln(1+\gamma_1(u))]^2\lambda(\mathrm{d}u)<ct$。进而由引理2，$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N_1(t)}{t}=0$ a.s.。另一方面，$M_1(t)$ 的二次变分为 $\langle M_1,M_1\rangle_t=\sigma_{12}^2\int_0^tx_1^2(s)\mathrm{d}s$。由指数鞅不等式[19]，对任意整数 $k>1$，有：

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant k}[M_1(t)-0.5\langle M_1,M_1\rangle_t]>2\ln k\}\leqslant 1/k^2。$$

利用 Borel-Cantelli 引理[19]可知，存在 $\Omega_0\in\mathscr{F}$ 且 $P(\Omega_0)=1$，使得对任意 $\omega\in\Omega_0$，都存在一个整数 $k_0=k_0(\omega)>0$，当 $k\geqslant k_0(\omega)$，$0\leqslant t\leqslant k$ 时，

$$M_1(t)\leqslant 2\ln k+0.5\langle M_1,M_1\rangle_t=2\ln k+0.5\sigma_{12}^2\int_0^tx_1^2(s)\mathrm{d}s。\tag{9}$$

由式(8)和式(9)，有 $\ln x_1(t,\omega)\leqslant\ln x_1(0)+\beta_1t+\sigma_{11}B_{11}(t,\omega)+2\ln k+N_1(t,\omega)$。因此，当 $\omega\in\Omega_0, k\geqslant k_0(\omega), 0<(k-1)\leqslant t\leqslant k$ 时，$\frac{\ln x_1(t)}{t}\leqslant\frac{\ln x_1(0)}{t}+\beta_1+\frac{\sigma_{11}B_{11}(t)}{t}+\frac{2\ln k}{k-1}+\frac{N_1(t)}{t}$。

由强大数定律[19]，$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{B_{11}(t)}{t}=0$ a.s.。注意到 $P(\Omega_0)=1$。对任意 $\omega\in\Omega_0$，有 $\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\ln x_1(t)}{t}\leqslant\beta_1<0$ a.s.。进而可得 $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=0$ a.s.。即种群 x_1 趋于灭绝。类似地，由 Itô 公式，指数鞅不等式及 Borel-Cantelli 引理，存在 $\Omega_1\in\mathscr{F}$ 且 $P(\Omega_1)=1$，使得对任意的 $\omega\in\Omega_1$，都存在一个整数 $l_0=l_0(\omega)>0$，当 $l\geqslant l_0(\omega)$，$0\leqslant t\leqslant l$ 时，有：

$$\ln x_2(t,\omega)\leqslant\ln x_2(0)+\beta_2t+a_{21}\int_0^tx_1(s,\omega)\mathrm{d}s+\sigma_{21}B_{21}(t,\omega)+2\ln l+N_2(t,\omega),\tag{10}$$

其中，$N_2(t)=\int_0^t\int_Y\ln(1+\gamma_2(u))\widetilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u)$。因为 $\lim\limits_{t\to\infty}x_1(t)=0$ a.s.，所以对任意的 $0<\varepsilon<-\frac{\beta_2}{a_{21}}$，存在 $T>0$，使得 $t>T$ 时，$x_1(t)<\varepsilon$。又由 $x_1(t)$ 在 $[0,T]$ 上的连续性可知，存在 $M>0$，使得 $x_1(t)\leqslant M$。故由式(10)得：

$$\ln x_2(t)\leqslant\ln x_2(0)+\beta_2t+a_{21}\int_0^Tx_1(s)\mathrm{d}s+a_{21}\int_T^tx_1(s)\mathrm{d}s+\sigma_{21}B_{21}(t)+2\ln l+N_2(t)\leqslant(\beta_2+a_{21}\varepsilon)t+\ln x_2(0)+a_{21}MT-a_{21}\varepsilon T+\sigma_{21}B_{21}(t)+2\ln l+N_2(t)。$$

因此，当 $\omega\in\Omega_1, l\geqslant l_0(\omega), 0<(l-1)\leqslant t\leqslant l$ 时，

$$\frac{\ln x_2(t)}{t}\leqslant\frac{\ln x_2(0)}{t}+(\beta_2+a_{21}\varepsilon)+\frac{a_{21}MT}{t}-\frac{a_{21}\varepsilon T}{t}+\frac{\sigma_{21}B_{21}(t)}{t}+\frac{2\ln l}{l-1}+\frac{N_2(t)}{t}。$$

由假设H）及引理2可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N_2(t)}{t}=0$ a.s.。又由强大数定律，$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{B_{21}(t)}{t}=0$ a.s.。注意到 $P(\Omega_1)=1$。所以对任意的 $\omega\in\Omega_1$，$\limsup\limits_{t\to\infty}\frac{\ln x_2(t)}{t}\leqslant\beta_2+a_{21}\varepsilon<0$ a.s.，进而可得 $\lim\limits_{t\to\infty}x_2(t)=0$ a.s.，即种群 x_2 趋于灭绝。

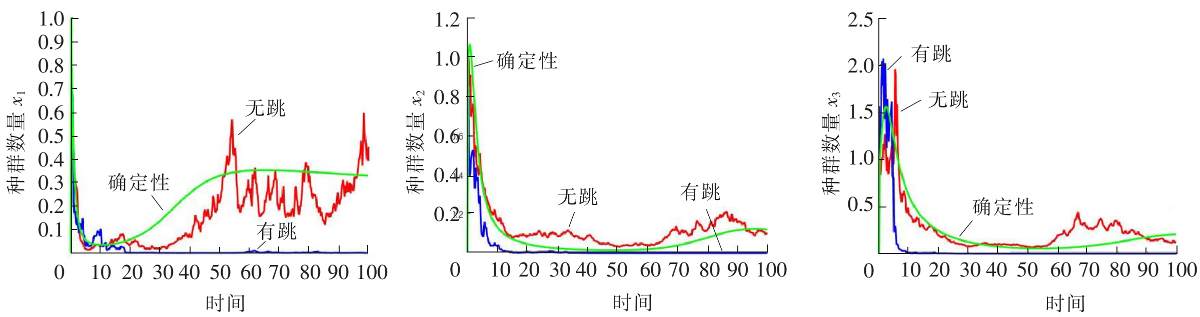
类似可证，$\lim\limits_{t\to\infty}x_3(t)=0$ a.s.，从而，定理3成立。

注1 由定理3可知，白噪声或 Lévy 噪声的强度较大时可以使种群 x_1, x_2, x_3 都趋于灭绝。

2　数值模拟

笔者将用文献[21]中提到的 Milsteins 方法来验证理论结果。

对模型(2)，令初值$(x_1(0), x_2(0), x_3(0))=(1,1,1)$，选取参数 $r_1=0.2$，$r_2=0.05$，$r_3=0.06$，$a_{11}=0.5$，$a_{12}=0.6$，$a_{13}=0.4$，$a_{21}=0.6$，$a_{22}=0.1$，$a_{23}=0.2$，$a_{31}=0.4$，$a_{32}=0.5$，$a_{33}=0.25$，$\sigma_{11}=0.3$，$\sigma_{12}=0.25$，$\sigma_{21}=0.15$，$\sigma_{22}=0.3$，$\sigma_{31}=0.1$，$\sigma_{32}=0.4$，$Y=(0,\infty)$，$\lambda(Y)=1$，$\gamma_1(u)=\gamma_2(u)=\gamma_3(u)=0.9$，则 $\beta_1\approx-0.1031<0$，因此，定理 3 的条件成立。由图 1 可知，模型(2)中种群 x_1，x_2，x_3 都趋于灭绝，这与定理 3 的结论一致。同时分别对比图 1 a)—c)中的确定性模型、只含有白噪声的随机模型和既有白噪声又有 Lévy 噪声的随机模型可得结论：Lévy 噪声对种群数量产生了较大影响，它导致了种群 x_1，x_2，x_3 的灭绝。



a) 种群 x_1 的数量随时间的变化　b) 种群 x_2 的数量随时间的变化　c) 种群 x_3 的数量随时间的变化

图 1　种群的数量变化

Fig.1　Change in the number of populations

3　结　论

本文研究了一类具有双参数扰动及 Lévy 跳的随机三种群食物网模型全局正解的存在唯一性和随机最终有界性，讨论了种群灭绝的充分条件，并运用数值模拟验证了结果的合理性。研究结果表明，在 Lévy 噪声的影响下模型是随机最终有界的，并且 Lévy 噪声可以导致种群的灭绝。因此，在考虑某些突发性环境冲击时，具有 Lévy 跳的随机模型有利于更好地研究种群的动力学性质。在未来的研究中，将着力于考虑该模型的一些其他的动力学性质。

参考文献/References：

[1] SEN D, GHORAI S, BANERJEE M . Complex dynamics of a three species prey-predator model with intraguild predation [J]. Ecological Complexity, 2018, 34: 9-22.

[2] PANJA P, MONDAL S K. Stability analysis of coexistence of three species prey-predator model [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81 (1/2): 373-382.

[3] 赵治涛，张开蕊，张玲. 具有食饵互惠的随机三种群捕食模型的持续与灭绝[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2017,34(1):23-34.
ZHAO Zhitao, ZHANG Kairui, ZHANG Ling. Persistence and extinction for a stochastic three species predation model with prey mutualism [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2017,34(1):23-34.

[4] CHEN Bin, WANG Minxing. Positive solutions to a three-species predator-prey model [J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28(6): 1256-1266.

[5] DUBEY B, UPADHYAY R K. Persistence and extinction of one-prey and two-predators system [J]. Nonlinear Analysis Modelling & Control, 2004, 9(4): 307-329.

[6] QIU Hong, DENG Wenmin. Stationary distribution and global asymptotic stability of a three-species stochastic food-chain system [J]. Turkish Journal of Mathematics, 2017, 41: 1292-1303.

[7] DALAL N, GREENHALGH D, MAO Xuerong. A stochastic model for internal HIV dynamics [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 341(2): 1084-1101.

[8] VASILOVA M. Asymptotic behavior of a stochastic Gilpin-Ayala predator-prey system with time-dependent delay [J]. Mathematical & Computer Modelling, 2013, 57(3/4): 764-781.

[9] MAITI A, JANA M M, SAMANTA G P. Deterministic and stochastic analysis of a ratio-dependent predator-prey system with delay [J].

Nonlinear Analysis Modelling & Control，2013，12(3)：383-398.
[10] DU Bo. Existence，extinction and global asymptotical stability of a stochastic predator-prey model with mutual interference [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing，2014，46(1/2)：79-91.
[11] 刘蒙. 随机种群模型若干性质的研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2012.
LIU Meng. Analysis on Some Properties of Stochastic Population Systems [D]. Harbin：Harbin Institute of Technology，2012.
[12] DU Bo，WANG Yamin，LIAN Xiuguo. A stochastic predator-prey model with delays [J]. Advances in Difference Equations，2015，2015 (1)：141-148.
[13] LIU Qun，JIANG Daqing，SHI Ningzhong，et al. Stochastic mutualism model with Lévy jumps [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2017，43：78-90.
[14] 臧彦超，李俊平. 带 Beddington-DeAngelis 功能反应和 Lévy 噪声的随机捕食-被捕食系统的渐近性质[J]. 应用数学学报，2015，38(2)：340-349.
ZANG Yanchao，LI Junping. A dynamics of a stochastic predator-prey system with Beddington-DeAngelis functional response and Lévy jumps [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2015，38(2)：340-349.
[15] LIU Meng，ZHU Yu. Stationary distribution and ergodicity of a stochastic hybrid competition model with Lévy jumps [J]. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2018，30：225-239.
[16] ZHANG Xinhong，JIANG Daqing，HAYAT T，et al. Dynamics of a stochastic SIS model with double epidemic diseases driven by Lévy jumps [J]. Physica A：Statistical Mechanics and its Applications，2017，471(1)：767-777.
[17] ZHANG Qiumei，JIANG Daqing，ZHAO Yanan，et al. Asymptotic behavior of a stochastic population model with Allee effect by Lévy jumps [J]. Nonlinear Analysis：Hybrid Systems，2017，24：1-12.
[18] LIU Meng，BAI Chuanzhi，DENG Meiling，et al. Analysis of stochastic two-prey one-predator model with Lévy jumps [J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2016，445：176-188.
[19] MAO Xuerong. Stochastic Differential Equations and Applications [M]. Chichester：Horwood Publishing Limited，2007.
[20] LIPSTER R S H. A strong law of large numbers for local martingales [J]. Stochastics，1980，3(4)：217-3228.
[21] ZOU Xiaoling，WANG Ke. Numerical simulations and modeling for stochastic biological systems with jumps[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2014，19(5)：1557-1568.

向本期载文的审稿专家致谢

本期《河北科技大学学报》共发表论文11篇。这些论文的发表是与有关专家的认真审读、细查资料、推敲分析、中肯评价分不开的。对此，本编辑部特向这些专家表示敬意，对他们的辛勤劳动表示感谢。本期载文的审稿专家名单如下(按姓名的汉语拼音顺序排列)：

蔡安江　曹建春　曹　章　黄　亮　黄元春　姜　锋

李建武　李　珊　李元凯　刘　丽　刘志广　孙晓东

谭　超　吴永宁　徐夫义　张　博　张继军　张新光

赵国英　赵晓朋

(本刊编辑部)