文章编号:1008-1542(2019)02-0119-06　　doi:10.7535/hbkd.2019yx02004

具有临界 Sobolev-Hardy 项的拟线性 p-重调和方程解的存在性

任　艳,桑彦彬

(中北大学理学院数学系,山西太原　030051)

摘　要: 为了研究一类带有 Hardy 项和多临界 Sobolev-Hardy 指数的拟线性 p-重调和方程解的存在性,借助于 Ekeland 变分原理,给出上述问题解的存在性定理。首先,将方程对应的变分泛函定义在约束集 M_η(通常称为 Nehari 流形)上,使得该泛函下方有界。其次,利用纤维映射将上述集合 M_η 划分为 M_η^+,M_η^0 和 M_η^- 等 3 部分,并分别研究每部分的性质,证明了 M_η^+ 和 M_η^- 中泛函极小值的存在性。最后,利用隐函数定理,得到在参数满足一定条件下,存在极小化序列 $\{u_n\}$,满足 $(PS)_c$ 条件,从而完成了该方程解的存在性的证明。所得结论可为判定解的结构和性质提供理论依据。

关键词: 非线性泛函分析;临界 Sobolev-Hardy 项;拟线性 p-重调和方程;Ekeland 变分原理;解的存在性

中图分类号: O175.25　　**文献标志码:** A

Existence of solutions for quasilinear p-biharmonic equations with critical Sobolev-Hardy terms

REN Yan, SANG Yanbin

(School of Science, North University of China, Taiyuan, Shanxi 030051, China)

Abstract: In order to study a class of quasilinear p-biharmonic equations with Hardy terms and multi-critical Sobolev-Hardy exponents, the existence theorem of the solutions to the above problem is established by means of the Ekeland variational principle. Firstly, to guarantee the variational functional is bounded from below, it is restricted on a set M_η (usually called Nehari manifold). Secondly, the set M_η is divided into three parts M_η^+, M_η^0 and M_η^- by using fibering maps. Moreover, the existence of minimum in M_η^+ and M_η^- is proved by studying the properties of the two subsets. Finally, by using implicit function theorem, it is found that there exists a minimizing sequence $\{u_n\}$ making the $(PS)_c$ conditions hold when the parameters satisfy certain conditions. Therefore, the existence of the solutions to the problem is proved. The conclusions provide a theoretical basis for judging the structure and properties of the solutions.

收稿日期:2018-09-11;修回日期:2018-11-01;责任编辑:张　军

基金项目:山西省自然科学基金(201601D011003)

第一作者简介:任　艳(1993—),女,山西吕梁人,硕士研究生,主要从事非线性泛函分析方面的研究。

通信作者:桑彦彬副教授。E-mail:sangyanbin@126.com

任艳,桑彦彬.具有临界 Sobolev-Hardy 项的拟线性 p-重调和方程解的存在性[J].河北科技大学学报,2019,40(2):119-124.

REN Yan, SANG Yanbin. Existence of solutions for quasilinear p-biharmonic equations with critical Sobolev-Hardy terms[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2019, 40(2): 119-124.

Keywords: nonlinear functional analysis; critical Sobolev-Hardy terms; quasilinear p-biharmonic equations; Ekeland's variational principle; existence of the solution

近年来，人们对于 Sobolev-Hardy 不等式相关的椭圆问题进行了广泛的研究，并得出了许多重要结论，如文献[1—17]。特别地，GHOUSSOUB 等[5]运用变分方法考虑了带有临界 Sobolev-Hardy 项的拟线性椭圆方程解的存在性。LI 等[7]研究了如下带有 Dirichlet 边值的拟线性椭圆方程：

$$\begin{cases}-\Delta_p u=\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^p}+K(x)\dfrac{|u|^{p^*(s)-2}u}{|x|^s}+Q(x)\dfrac{|u|^{p^*(t)-2}u}{|x-x_0|^t}+\lambda f(x,u),\quad x\in\Omega,\\ u=0,\quad x\in\partial\Omega。\end{cases}\tag{1}$$

GAO 等[8]在方程(1)的基础上考虑了 $p=2,\lambda=1$ 时的奇异椭圆方程问题，得出了全局紧性以及解的存在性的相关结论。值得注意的是，BHAKTA[10]证明了以下问题弱解的存在性：

$$\begin{cases}\Delta_p^2 u=\lambda\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}+\dfrac{|u|^{q-2}u}{|x|^{\beta}},\qquad x\in\mathbf{R}^N,\\ u\in D^{2,p}(\mathbf{R}^N),\qquad x\neq 0,\end{cases}$$

其中 $\beta=N-\dfrac{q(N-2p)}{p}$，$1<p<\dfrac{N}{2}$，$q>p$。

在前人研究的基础上，受文献[3,7,10]的启发，笔者将着重研究如下带有临界 Sobolev-Hardy 项的拟线性 p-重调和方程：

$$\begin{cases}\Delta_p^2 u=\mu\dfrac{|u|^{p-2}u}{|x|^{2p}}+f(x)\dfrac{|u|^{p^*(m)-2}u}{|x|^{2m}}+g(x)\dfrac{|u|^{p^*(n)-2}u}{|x-x_0|^{2n}}+\eta h(x)|u|^{q-2}u,\quad x\in\Omega,\\ u=\Delta u=0,\quad x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$\Delta_p^2 u=\Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$ 是一个四阶算子，$1<p<\dfrac{N}{2}$，$0<\mu<\mu_{N,p}=\left(\dfrac{(p-1)N(N-2p)}{p^2}\right)^p$，$\eta>0$，$x_0\in\Omega$，$x_0\neq 0$，$1\leqslant q<p$，$f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 是 Ω 上的非负连续函数，$p^*(m):=\dfrac{p(N-2m)}{N-2p}$，$p^*(n):=\dfrac{p(N-2n)}{N-2p}$ $(0<m\leqslant n<p)$ 是临界 Sobolev-Hardy 指数。记 $p^*(0)=p^*:=\dfrac{Np}{N-2p}$ 为临界 Sobolev 指数。

1 主要结果

Rellich 不等式[18]为

$$\int_\Omega\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\mu_{N,p}}\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x,\quad\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega),\tag{3}$$

其中最佳常数 $\mu_{N,p}=\left(\dfrac{(p-1)N(N-2p)}{p^2}\right)^p$。记 $\|u\|_\mu^p=\displaystyle\int_\Omega\left(|\Delta u|^p-\mu\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\right)\mathrm{d}x$ 为空间 $E=W_0^{1,p}(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$ 的范数。对任意的 $u\in E$，定义问题(2)对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{p}\|u\|_\mu^p-\frac{1}{p^*(m)}\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x-\frac{1}{p^*(n)}\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}\mathrm{d}x-\frac{\eta}{q}\int_\Omega h(x)|u|^q\mathrm{d}x,$$

称泛函 $I(u)$ 满足 $(PS)_c$ 条件[19]，如果任意 $\{u_n\}\subset E$ 满足当 $n\to\infty$ 时，$I(u_n)\to c$，$I'(u_n)\to 0$ 都具有收敛子列。

令 $M_\eta=\{u\in E\setminus\{0\}:\langle I'(u),u\rangle=0\}$，那么

$u\in M_\eta\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned}\langle I'(u),u\rangle=&\int_\Omega\left(|\Delta u|^p-\mu\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x-\\&\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}\mathrm{d}x-\eta\int_\Omega h(x)|u|^q\mathrm{d}x=0,\quad u\neq 0。\end{aligned}\tag{4}$$

定义 $\Phi_\eta(u)=\langle I'(u),u\rangle$,则对任意的 $u\in M_\eta$,有:

$\langle \Phi'_\eta(u),u\rangle=$

$$(p-q)\|u\|_\mu^p-(p^*(m)-q)\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x-(p^*(n)-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}\mathrm{d}x= \tag{5}$$

$$(p-p^*(n))\|u\|_\mu^p-(q-p^*(n))\eta\int_\Omega h(x)|u|^q\mathrm{d}x-(p^*(m)-p^*(n))\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x。 \tag{6}$$

类似于文献[20],将 M_η 分成 3 个部分:

$M_\eta^+=\{u\in M_\eta:\langle\Phi'_\eta(u),u\rangle>0\}$;$M_\eta^0=\{u\in M_\eta:\langle\Phi'_\eta(u),u\rangle=0\}$;$M_\eta^-=\{u\in M_\eta:\langle\Phi'_\eta(u),u\rangle<0\}$。

对于泛函 $I(u)$,定义不等式:$C\int_\Omega\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\Delta u|^p\mathrm{d}x$,$\forall u\in E$。假设 $f(0)\neq0$,$g(x_0)\neq0$,令 $h_+:=\max\{h,0\}$,$h_-:=\max\{-h,0\}$。记 $S(\mu,m)$ 为最佳 Sobolev-Hardy 常数,即:

$$S(\mu,m):=\inf_{u\in E\setminus\{0\}}\frac{\int_\Omega\left(|\Delta u|^p-\mu\frac{|u|^p}{|x|^{2p}}\right)\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p}{p^*(m)}}}。$$

定理 1　(非平凡解的存在性)假设 $1<p<\frac{N}{2}$,$0<\mu<\mu_{N,p}$,$\eta>0$,$x_0\in\Omega$,$x_0\neq0$,$1\leqslant q<p$,$f(x)$,$g(x)$,$h(x)\in C(\Omega)$,若 $h_+\neq0$,$\eta\in(0,\Lambda)$,那么问题(2)在空间 E 中至少存在 1 个非平凡弱解,其中:

$$\Lambda=\min\left\{\left(\frac{p-q}{2(p^*(m)-q)|f|_\infty}\right)^{\frac{p-q}{p^*(m)-p}}\frac{p^*(n)-p}{(p^*(n)-q)|h_+|_\infty}d_\Omega^{-\frac{2tq}{p^*(n)}}|\Omega|^{\frac{q-p^*(n)}{p^*(n)}}S_{\mu,m}^{\frac{(N-2m)(p-q)}{2p(p-m)}}S_{\mu,n}^{\frac{q}{p}},\right.$$
$$\left.\left(\frac{p-q}{2(p^*(n)-q)|g|_\infty}\right)^{\frac{p-q}{p^*(n)-p}}\frac{p^*(n)-p}{(p^*(n)-q)|h_+|_\infty}d_\Omega^{-\frac{2tq}{p^*(n)}}|\Omega|^{\frac{q-p^*(n)}{p^*(n)}}S_{\mu,n}^{\frac{(N-2n)(p-q)}{2p(p-n)}+\frac{q}{p}}\right\},$$

$d_\Omega=\sup\limits_{x,y\in\Omega}|x-y|$ 是 Ω 的直径,Ω 的 Lebesgue 测度为 $|\Omega|$,$|\cdot|_\infty=\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$。

2　定理 1 的证明

为了证明定理 1,需先给出以下几个重要引理。

通过 Hölder 不等式和 Sobolev-Hardy 不等式,根据文献[7]可得以下结论。

引理 1　能量泛函 $I(u)$ 在 M_η 上是强制且下方有界的。

引理 2　若 $\eta\in(0,\Lambda)$,那么 $M_\eta^0=\varnothing$。

证明　运用反证法,假设存在 $\eta\in(0,\Lambda)$ 使得 $M_\eta^0\neq\varnothing$。由式(5)和式(6),对任意的 $u\in M_\eta^0$,有:

$$\|u\|_\mu^p=\frac{p^*(m)-q}{p-q}\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x+\frac{p^*(n)-q}{p-q}\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}\mathrm{d}x \tag{7}$$

和

$$\|u\|_\mu^p=\frac{q-p^*(n)}{p-p^*(n)}\eta\int_\Omega h(x)|u|^q\mathrm{d}x+\frac{p^*(m)-p^*(n)}{p-p^*(n)}\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{p^*(n)-q}{p^*(n)-p}\eta\int_\Omega h(x)|u|^q\mathrm{d}x\leqslant\eta\frac{p^*(n)-q}{p^*(n)-p}d_\Omega^{\frac{2nq}{p^*(n)}}|\Omega|^{\frac{p^*(n)-q}{p^*(n)}}S_{\mu,n}^{-\frac{q}{p}}\|u\|_\mu^q|h_+|_\infty,$$

因此

$$\|u\|_\mu\leqslant\left(\eta\frac{p^*(n)-q}{p^*(n)-p}d_\Omega^{\frac{2nq}{p^*(n)}}|\Omega|^{\frac{p^*(n)-q}{p^*(n)}}S_{\mu,n}^{-\frac{q}{p}}|h_+|_\infty\right)^{\frac{1}{p-q}}。 \tag{8}$$

由 Hölder 不等式和 Sobolev-Hardy 不等式及式(7)可得:

$$\|u\|_\mu^p\leqslant\frac{p^*(m)-q}{p-q}|f|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(m)}}{S_{\mu,m}^{\frac{p^*(m)}{p}}}+\frac{p^*(n)-q}{p-q}|g|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(n)}}{S_{\mu,n}^{\frac{p^*(n)}{p}}}\leqslant$$
$$2\max\left\{\frac{p^*(m)-q}{p-q}|f|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(m)}}{S_{\mu,m}^{\frac{p^*(m)}{p}}},\frac{p^*(n)-q}{p-q}|g|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(n)}}{S_{\mu,n}^{\frac{p^*(n)}{p}}}\right\}。 \tag{9}$$

分2种情况讨论：

情形1 当$\frac{p^*(m)-q}{p-q}|f|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(m)}}{S_{\mu,m}^{\frac{p^*(m)}{p}}}\leqslant\frac{p^*(n)-q}{p-q}|g|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(n)}}{S_{\mu,n}^{\frac{p^*(n)}{p}}}$时，由式(8)和式(9)可推得：

$$\eta\geqslant\left(\frac{p-q}{2(p^*(n)-q)|g|_\infty}\right)^{\frac{p-q}{p^*(n)-p}}\frac{p^*(n)-p}{(p^*(n)-q)|h_+|_\infty}d_\Omega^{-\frac{2tq}{p^*(n)}}|\Omega|^{\frac{q-p^*(n)}{p^*(n)}}S_{\mu,n}^{\frac{(N-2n)(p-q)}{2p(p-n)}+\frac{q}{p}}。$$

情形2 当$\frac{p^*(m)-q}{p-q}|f|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(m)}}{S_{\mu,m}^{\frac{p^*(m)}{p}}}>\frac{p^*(n)-q}{p-q}|g|_\infty\frac{\|u\|_\mu^{p^*(n)}}{S_{\mu,n}^{\frac{p^*(n)}{p}}}$时，由式(8)和式(9)可推得：

$$\eta>\left(\frac{p-q}{2(p^*(m)-q)|f|_\infty}\right)^{\frac{p-q}{p^*(m)-p}}\frac{p^*(n)-p}{(p^*(n)-q)|h_+|_\infty}d_\Omega^{-\frac{2tq}{p^*(n)}}|\Omega|^{\frac{q-p^*(n)}{p^*(n)}}S_{\mu,m}^{\frac{(N-2m)(p-q)}{2p(p-m)}}S_{\mu,n}^{\frac{q}{p}}。$$

因此$\eta\geqslant\Lambda$与$\eta\in(0,\Lambda)$矛盾，所以$M_\eta^0=\varnothing$。

由引理2可得对$\eta\in(0,\Lambda)$，有$M_\eta=M_\eta^+\cup M_\eta^-$。如文献[1]，定义：

$$\alpha_\eta:=\inf_{u\in M_\eta}I(u);\quad \alpha_\eta^+:=\inf_{u\in M_\eta^+}I(u);\quad \alpha_\eta^-:=\inf_{u\in M_\eta^-}I(u)。$$

通过上述定义得到以下引理。

引理3 如果$\eta\in(0,\Lambda)$，那么存在一个正数$c>0$，使得$\alpha_\eta\leqslant\alpha_\eta^+<-c<0$。

证明 容易证明存在$c>0$，使得$\alpha_\eta^+<-c<0$。由式(5)可得$u\in M_\eta^+$，有：

$$\|u\|_\mu^p>\frac{p^*(m)-q}{p-q}\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}dx+\frac{p^*(n)-q}{p-q}\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}dx,$$

因此

$$I(u)=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|u\|_\mu^p-\left(\frac{1}{p^*(m)}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}dx-\left(\frac{1}{p^*(n)}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}dx<$$
$$\frac{(p^*(m)-q)(p-p^*(m))}{pqp^*(m)}\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}dx+\frac{(p^*(n)-q)(p-p^*(n))}{pqp^*(n)}\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}dx<0,$$

所以引理3得证。

引理4 对$\eta\in(0,\Lambda)$，任意给定$u\in M_\eta$，存在$\varepsilon>0$和可微函数$\psi:B(0,\varepsilon)\subset E\to\mathbf{R}^+$，使得$\psi(0)=1$，$\psi(v)(u-v)\in M_\eta$且有：$\langle\psi'(0),v\rangle=\frac{b_1(u,v)}{b_2(u)},\quad\forall v\in E$，

其中：

$$b_1(u,v)=p\int_\Omega\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta v-\mu\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^{2p}}\right)dx-p^*(m)\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)-2}|u|v}{|x|^{2m}}dx-$$
$$p^*(n)\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)-2}|u|v}{|x-x_0|^{2n}}dx-\eta q\int_\Omega h(x)|u|^{q-2}uv\,dx,\tag{10}$$

$$b_2(u)=(p-q)\|u\|_\mu^p-(p^*(m)-q)\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}dx-(p^*(n)-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}dx。\tag{11}$$

证明 证明的基本思想来源于文献[21]。

对任意$u\in M_\eta$，定义$H:\mathbf{R}\times E\to\mathbf{R}$，有：

$$H(\psi,\omega)=\langle I'(\psi(u-\omega)),\psi(u-\omega)\rangle=$$
$$|\psi|^p\int_\Omega\left(|\Delta(u-\omega)|^p-\mu\frac{|u-\omega|^p}{|x|^{2p}}\right)dx-|\psi|^{p^*(m)}\int_\Omega f(x)\frac{|u-\omega|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}dx-$$
$$|\psi|^{p^*(n)}\int_\Omega g(x)\frac{|u-\omega|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}dx-\eta|\psi|^q\int_\Omega h(x)|u-\omega|^q dx,$$

那么有$H(1,0)=\langle I'(u),u\rangle=0$，且由引理2及式(4)，可得：

$$\left.\frac{dH}{d\psi}\right|_{(1,0)}=(p-q)\|u\|_\mu^p-(p^*(m)-q)\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}dx-(p^*(n)-q)\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}dx=$$
$$\langle\Phi'_\eta(u),u\rangle\neq0,$$

因此存在 $\varepsilon>0$,使得 $H(\psi,\omega)=0$ 有唯一连续解 $\psi=\psi(\omega)>0$,对 $\|\omega\|<\varepsilon$,运用隐函数存在定理,由于 $H(1,0)=0$,可得 $\psi(0)=1$。更多地,对 $v\in B(0,\varepsilon)$,由于 $H(\psi(v),v)=0$,$v\in E$ 可得:

$$0=H(\psi(v),v)=\langle I'(\psi(v)(u-v)),\psi(v)(u-v)\rangle=$$

$$\int_\Omega\left(|\Delta(\psi(v)(u-v))|^p-\mu\frac{|\psi(v)(u-v)|^p}{|x|^{2p}}\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x)\frac{|\psi(v)(u-v)|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x-$$

$$\int_\Omega g(x)\frac{|\psi(v)(u-v)|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}\mathrm{d}x-\eta\int_\Omega h(x)|\psi(v)(u-v)|^q\mathrm{d}x,$$

因此有:$\psi(v)(u-v)\in M_\eta$,　$\forall v\in B(0,\varepsilon)$,对任意 $v\in E$,$\varphi>0$,由于

$$\langle H_\omega,v\rangle|_{\omega=0,\varphi=1}=\lim_{\varphi\to0}\frac{H(1,0+v\varphi)-H(1,0)}{\varphi}=$$

$$-p\int_\Omega\left(|\Delta u|^{p-2}\Delta u\Delta v-\mu\frac{|u|^{p-2}uv}{|x|^{2p}}\right)\mathrm{d}x+p^*(m)\int_\Omega f(x)\frac{|u|^{p^*(m)-2}|u|v}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x+$$

$$p^*(n)\int_\Omega g(x)\frac{|u|^{p^*(n)-2}}{|x-x_0|^{2n}}|u|v\mathrm{d}x+\eta q\int_\Omega h(x)|u|^{q-2}uv\mathrm{d}x,$$

则有:

$$\langle\psi'(0),v\rangle=-\frac{\langle H_\omega,v\rangle}{H_\psi}\bigg|_{\omega=0,\varphi=1}:=\frac{b_1(u,v)}{b_2(u)},$$

其中 $b_1(u,v)$,$b_2(u)$分别由式(10)和式(11)定义。

引理 4 证毕。

根据文献[7]中引理 3.4 的证明,由引理 1 及 Ekeland 变分原理,得到下面的引理。

引理 5　如果 $\eta\in(0,\Lambda)$,那么在空间 E 中存在一个极小化序列$\{u_n\}\in M_\eta$,对 $I(u)$有:

$$I(u_n)=\alpha_\eta+o(1),\quad I'(u_n)=o(1),\quad \text{在 } E^{-1}\text{中。}$$

定理 1 的证明　由引理 5,存在 PS 序列$\{u_n\}\in M_\eta$,对 $I(u)$有:

$$I(u_n)=\alpha_\eta+o_n(1),\quad I'(u_n)=o_n(1)。\tag{12}$$

由引理 1 知在空间 E 中$\{u_n\}$是有界的,因此存在一个子列,仍记为$\{u_n\}$,则对 $u\in E$,有:

$$\begin{cases}u_n\rightharpoonup u, & \text{在 } E \text{ 中弱收敛},\\ u_n(x)\to u(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中几乎处处收敛},\\ u_n\to u, & \text{在 } L^s(\Omega) \text{ 中强收敛,其中 } 1\leqslant s<p^*,\\ u_n\to u, & \text{在 } L^s(\Omega,|x|^{-m}) \text{ 中强收敛,其中 } 1\leqslant s<p^*(m)。\end{cases}$$

下面证明 u 是问题(2)的解。由式(4)及 $u_n\in M_\eta$ 可得:

$$\eta\int_\Omega h(x)|u_n|^q\mathrm{d}x=\frac{q}{p}\|u_n\|_\mu^p-\frac{q}{p^*(n)}\left(\int_\Omega f(x)\frac{|u_n|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x)\frac{|u_n|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}\mathrm{d}x\right)-$$

$$q\left(\frac{1}{p^*(m)}-\frac{1}{p^*(n)}\right)\int_\Omega f(x)\frac{|u_n|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x-qI(u_n)\geqslant$$

$$\frac{q}{p}\|u_n\|_\mu^p-\frac{q}{p^*(n)}\left(\int_\Omega f(x)\frac{|u_n|^{p^*(m)}}{|x|^{2m}}\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x)\frac{|u_n|^{p^*(n)}}{|x-x_0|^{2n}}\mathrm{d}x\right)-qI(u_n)=$$

$$\frac{q}{p}\|u_n\|_\mu^p-\frac{q}{p^*(n)}\left(\|u_n\|_\mu^p-\eta\int_\Omega h(x)|u_n|^q\mathrm{d}x\right)-qI(u_n),$$

因此,有:

$$\frac{p^*(n)-q}{p^*(n)}\eta\int_\Omega h(x)|u_n|^q\mathrm{d}x\geqslant q\frac{p^*(n)-p}{pp^*(n)}\|u_n\|_\mu^p-qI(u_n)>-qI(u_n)。\tag{13}$$

在式(13)中,令 $n\to\infty$,由式(12)及 $\alpha_\eta<0$ 知:$\eta\int_\Omega h(x)|u_n|^q\mathrm{d}x>-q\alpha_\eta\dfrac{p^*(n)}{p^*(n)-q}=\dfrac{qp^*(n)}{q-p^*(n)}$ $\alpha_\eta>0$,意味着 $u\neq0$。因此定理 1 得证。

3 结 论

本文讨论了一类具有临界指数的 p-重调和方程，运用变分方法和 Ekeland 变分原理，建立了其解的存在性定理，可为判定解的结构和性质提供理论依据。

参考文献/References：

[1] TSING-SAN H，HUE-LI L. Multiple positive solutions for singular elliptic equations with weighted Hardy terms and critical Sobolev-Hardy exponents[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A-Mathematics，2010，140(3)：617-633.

[2] WANG Li，WEI Qiaoling，KANG Dongsheng. Multiple positive solutions for p-Laplace elliptic equations involving concave-convex nonlinearities and a Hardy-type term [J]. Nonlinear Analysis，2011，74(2)：626-638.

[3] MUSINA R. Optimal Rellich-Sobolev constants and their extremals[J]. Differential and Integral Equations，2014，27(5)：579-600.

[4] LI Yuanyuan. Nonexistence of p-Laplace equations with multiple critical Sobolev-Hardy terms[J]. Applied Mathematics Letters，2016，60：56-60.

[5] GHOUSSOUB N，YUAN C. Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents[J]. Transactions of the American Mathematical Society，2000，352(12)：5703-5743.

[6] GAO Wenjie，LI Yuanxiao. Existence of multiple solutions for quasilinear elliptic equation with critical Sobolev-Hardy terms [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences，2015，38(1)：145-154.

[7] LI Yuanyuan，GUO Qianqiao，NIU Pengcheng. The existence of solutions for quasilinear elliptic problems with combined critical Sobolev-Hardy terms[J]. Journal Mathematical Analysis and Applications，2012，388：525-538.

[8] GAO Wenliang，PENG Shuangjie. An elliptic equation with combined critical Sobolev-Hardy terms[J]. Nonlinear Analysis，2006，65(8)：1595-1612.

[9] 吕登峰. 一类含 Sobolev-Hardy 临界指数椭圆方程非平凡解的存在性[J]. 石河子大学学报(自科版)，2007，25(4)：525-528.
LYU Dengfeng. Existence of nontrivial solutions for an elliptic equations with critical Sobolev-Hardy exponents [J]. Journal of Shihezi University (Natural Science Edition)，2007，25(4)：525-528.

[10] BHAKTA M. Entire solutions for a class of elliptic equations involving p-biharmonic operator and Rellich potentials[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2015，423(2)：1570-1579.

[11] NYAMORADI N，JAVIDI M. Solutions of the quasilinear elliptic systems with combined critical Sobolev-Hardy terms[J]. Ukrainian Mathematical Journal，2015，67(6)：1-25.

[12] 朱玉，商彦英. 带有加权 Hardy-Sobolev 临界指数的拟线性椭圆方程正解的存在性和多重性[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2018，40(2)：56-63.
ZHU Yu，SHANG Yanying. Existence and multiplicity of positive solutions for a quasilinear elliptic equation with weighted Hardy-Sobolev exponents[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition)，2018，40(2)：56-63.

[13] PENG Zhen，CHEN Guanwei. Existence and multiplicity of positive solutions for p-Laplacian elliptic equations[J]. Boundary Value Problems，2016，2016：125.

[14] 刘海燕，廖家锋，唐春雷. 带 Hardy-Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程正解的存在性[J]. 西南大学学报(自然科学版)，2015，37(6)：60-65.
LIU Haiyan，LIAO Jiafeng，TANG Chunlei. Existence of positive solutions for semilinear elliptic equations with critical Hardy-Sobolev exponents [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition)，2015，37(6)：60-65.

[15] CALDIROLI P. Radial and non radial ground states for a class of dilation invariant fourth order semilinear elliptic equations on $\mathbf{R}^N$[J]. Communications on Pure and Applied Analysis，2014，13(2)：811-821.

[16] BUENO H，PAES-LEME L，RODRIGUES H. Multiplicity of solutions for p-biharmonic problems with critical growth [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics，2018，48(2)：425-442.

[17] 杜刚. 全空间上带 Hardy-Sobolev 临界指数的拟线性椭圆方程变号解的存在性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(9)：11-16.
DU Gang. On existence of sign-changing solutions for quasilinear elliptic equation involving Hardy-Sobolev exponents in $\mathbf{R}^N$[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)，2014，39(9)：11-16.

[18] DAVIES E B，HINZ A M. Explicit constants for Rellich inequalities [J]. Mathematische Zeitschrift，1998，227(3)：511-523.

[19] MICHEL W. Minimax Theorem [M].Boston：Birkhäuser，1996.

[20] TARANTELLO G. On nonhomogeneous elliptic equations involving critical Sobolev exponent [J]. Annales de Linstitut Henri Poincaré，1992，9(3)：281-304.

[21] CHEN Yaoping，CHEN Jianqing. Multiple positive solutions for a semilinear equation with critical exponent and prescribed singularity [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications，2016，130(6)：121-137.