

# 延迟 Gompertz 模型的数值分支和混合控制

宋继志<sup>1</sup>, 王媛媛<sup>2</sup>

(1. 中国石油大学(华东)计算机与通信工程学院, 山东青岛 266580; 2. 中国石油大学(华东)理学院, 山东青岛 266580)

**摘要:**为了研究物种的稳定性问题,要求缩小或者扩大生物系统的稳定区域,通过混合控制欧拉法研究了一个时滞 Gompertz 模型,运用状态反馈和参数扰动控制得到了 Neimark-Sacker 分支的理想结果。根据 Hopf 分支理论得到了连续系统平衡点的稳定性,通过混合控制欧拉算法得到了离散系统在要求的分支点所产生的 Neimark-Sacker 分支,利用中心流形定理和正规形方法,给出了确定分支周期解的分支方向与稳定性的计算公式。采用数值模拟验证了所得结果的正确性。研究结果表明,对于延迟 Gompertz 模型系统,如果选择合适的控制参数,就能够使分支点提前或者延迟。研究方法在理论和数值模拟方面都得到了良好的预期结果,为解决相关的控制问题提供了新的方法,对其他领域的控制问题研究具有一定的借鉴意义。

**关键词:**常微分方程数值解; Gompertz 模型; 混合控制; 欧拉法; 延迟; Neimark-Sacker 分支

中图分类号:O189.1 文献标志码:A

## Numerical bifurcation and hybrid control of a Gompertz model with time delay

SONG Jizhi<sup>1</sup>, WANG Yuanyuan<sup>2</sup>

(1. College of Computer and Communication Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao, Shandong 266580, China; 2. College of Science, China University of Petroleum (East China), Qingdao, Shandong 266580, China)

**Abstract:** In order to study the stability of species, the biological systems are required to reduce or expand the stable region. For a Gompertz model with time delay, a hybrid control Euler method is proposed in which state feedback and parameter perturbation are used to control the Neimark-Sacker bifurcation. The local stability of the equilibria is discussed according to Hopf bifurcation theory. For controlling Neimark-Sacker bifurcation, the hybrid control numerical algorithm is introduced to generate the Neimark-Sacker bifurcation at a desired bifurcation point. The explicit algorithms for determining the direction of the bifurcation and the stability of the bifurcating periodic solutions are derived by using the normal form method and center manifold theorem. Numerical examples are provided to illustrate the theoretical results. The research results show that the branch point can be in advance or delay for the delay Gompertz model system through choosing appropriate control parameters. The algorithm has obtained good results both in theory and numerical performance, which provides a new method and has

收稿日期:2018-06-14;修回日期:2018-09-19;责任编辑:张军

基金项目:中央高校基本科研专项资金(16CX02055A);国家自然科学基金(11401586)

第一作者简介:宋继志(1976—),男,山东济宁人,讲师,硕士,主要从事智能控制方面的研究。

通信作者:王媛媛副教授。E-mail:y-y-wang@163.com

宋继志,王媛媛.延迟 Gompertz 模型的数值分支和混合控制 [J].河北科技大学学报,2019,40(2):112-118.

SONG Jizhi, WANG Yuanyuan. Numerical bifurcation and hybrid control of a Gompertz model with time delay [J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2019, 40(2): 112-118.

certain theoretical significance for its application in many control problems.

**Keywords:** numerical solution of ordinary differential equation; Gompertz model; hybrid control; Euler method; delay; Neimark-Sacker bifurcation

Gompertz 方程<sup>[1]</sup>是描述单物种增长率问题的重要模型之一。模型方程如下:

$$\dot{x}(t) = -rx(t)\ln \frac{x(t)}{K}, \quad (1)$$

式中: $x(t)$ 为人口密度; $r > 0$ 是固有增长率; $K > 0$ 是环境容纳能力或饱和度; $-r \ln \frac{x(t)}{K}$ 是相关增长率。

假设物种增长需要更多的食物,模型加入延迟项( $t-\tau$ ),模型(1)修正为

$$\dot{x}(t) = -rx(t) \ln \frac{x(t-\tau)}{K}, \quad (2)$$

式中  $\tau > 0$  代表时间延迟。系统(2)称为延迟 Gompertz 模型。连续系统(1)和(2)以及相关的系统在文献[2—6]中有深入研究。

分支控制的目的是延迟或者提前固有分支的出现,改变现存分支点的参数值,稳定分支周期解的振幅等<sup>[7-11]</sup>,在文献[12—13]中,混合控制方法用于对控制分支的研究。

很多情况下,连续系统的精确解求解不出来,而得到去离散连续时间系统与连续系统动力学相容的离散时间模型是较好的结果。在文献[14—18]中,对某些延迟微分方程,给出了很多数值方法证明了离散系统能保持局部稳定性和 Hopf 分支。文献[19]应用欧拉法对于充分小的步长离散模型与原来模型具有相同类型的 Hopf 分支。在本论文中,对于延迟 Gompertz 模型,笔者构建了混合控制欧拉法数值算法,利用状态反馈和参数扰动控制 Neimark-Sacker 分支,结果表明通过选择合适的控制参数,控制系统的动力学行为发生了改变。

## 1 混合控制延迟微分方程的 Hopf 分支

设  $y(t) = \frac{x(\tau t)}{K} - 1$ , 则方程(2)转化为

$$\dot{y}(t) = -r\tau(y(t) + 1)\ln(y(t-1) + 1), \quad (3)$$

显然,方程(3)有唯一的零平衡点。方程(3)加入参数扰动和状态反馈得到如下方程:

$$\dot{y}(t) = -\alpha r\tau(y(t) + 1)\ln(y(t-1) + 1) + (1-\alpha)\tau y(t-1), \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

对方程(4)在平衡点  $y=0$  处线性化得到下面的结果:

$$\dot{y}(t) = [-\alpha r\tau + (1-\alpha)\tau]y(t-1), \quad (5)$$

方程(5)的特征方程为

$$\lambda = [-\alpha r\tau + (1-\alpha)\tau]e^{-\lambda}, \quad (6)$$

如果  $w > 0, iw$  是方程(6)的解,可以得到:

$$iw = \tau e^{iw}[-\alpha r + (1-\alpha)], \quad (7)$$

分离实部和虚部得:

$$\begin{cases} \tau[(1-\alpha) - \alpha r]\cos w = 0, \\ \tau[(1-\alpha) - \alpha r]\sin w = -w, \end{cases} \quad (8)$$

整理得到如下结果:

$$w^2 = \tau^2[-\alpha r + (1-\alpha)]^2, \quad (9)$$

即  $w = \tau[\alpha r - (1-\alpha)]$ ,  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ 。当  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , 则有:

$$\tau_k = \frac{w}{((1-\alpha) - \alpha r)\sin w} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

设  $w_0 = \tau[\alpha r - (1-\alpha)]$ ,  $\lambda_k = \alpha_k(\tau) + iw_k(\tau)$  是方程(6)在  $\tau = \tau_k$  附近的一个根,满足  $\alpha_k(\tau_k) = 0$ ,  $w_k(\tau_k) = w_0$ 。由此得到下面的结论。

**引理 1**  $\alpha'_{\tau_k}(\tau_k) > 0$ 。

**证明** 方程(6)两边对  $\tau$  微分得到:

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \tau + \frac{\tau}{\lambda}, \quad \left[\frac{d\lambda}{d\tau}\right]^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k} = \tau \left(1 - \frac{i}{w}\right),$$

由此得到  $\alpha'_{\tau_k}(\tau_k) > 0$ 。证毕。

**定理 1** 对系统(4),下面的结论成立。

如果  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , 则平衡点  $y=0$  在  $\tau \in (0, \tau_0)$  时渐近稳定, 当  $\tau > \tau_0$  时不稳定。对平衡点  $y=0$ , 当  $\tau = \tau_k$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  处经历 Hopf 分支。

## 2 欧拉混合控制系统的稳定性

笔者主要讨论数值离散混合控制系统。应用文献[12—13]的混合控制策略,对方程(3)应用欧拉法得到差分方程:

$$y_{n+1} = y_n - \alpha h r \tau (y_n + 1) \ln(y_{n-m} + 1) + (1 - \alpha) \tau h y_{n-m}, \quad \alpha > 0, \quad (11)$$

引进一个新的变量  $\mathbf{Y}_{n+1} = (y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-m})^T$ , 方程(11)记为

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{F}(y_n, \tau), \quad (12)$$

其中  $\mathbf{F} = (F_0, F_1, \dots, F_k, \dots, F_m)$ ,

$$F_k = \begin{cases} y_{n-k} + [(1 - \alpha) \tau h - \alpha \tau h r] y_{n-m-k}, & k = 0, \\ y_{n-k+1}, & 1 \leq k \leq m. \end{cases} \quad (13)$$

映射(12)的线性部分是:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{Y}_n, \quad (14)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (1 - \alpha \tau h) - \alpha \tau h r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  的特征方程为

$$\lambda^{m+1} - \lambda^m + [(1 - \alpha) \tau h - \alpha \tau h r] = 0. \quad (16)$$

**引理 2** 如果  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , 则方程(16)的所有根的模小于 1。

**证明** 当  $\tau=0$  时, 方程(16)为  $\lambda^{m+1} - \lambda^m = 0$ 。此时方程有  $m$  个重根  $\lambda=0$  和一个单根  $\lambda=1$ 。考虑根  $\lambda(\tau)$  使得  $|\lambda(0)|=1$ , 这个根是关于  $\tau$  的  $C^1$  函数。对方程(16), 得到如下结果:

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\tau} = \lambda \frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} + \bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}, \quad \left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\lambda=1, \tau=0} = 2h[(1-\alpha)h - \alpha hr],$$

因此, 如果  $(1-\alpha)h - \alpha hr < 0$ , 即  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , 则方程(16)的所有根的模小于 1 ( $|\lambda| < 1$ )。证毕。

当特征方程(16)的根穿过单位圆时有 Neimark-Sacker 分支产生。笔者要找到使得根穿过单位圆的  $\tau$  的值。假定单位圆上的根为  $e^{iw}$ ,  $w \in (-\pi, \pi]$ , 要处理一个实的多项式的复根出现, 并且复根成对出现, 在此  $w \in (0, \pi)$ , 则  $e^{iw}$  是特征方程(16)的根, 并且满足:

$$e^{iw} - 1 + [\alpha hr - (1 - \alpha)] e^{-imw} = 0, \quad (17)$$

分离实部和虚部得到:

$$\begin{cases} \cos w - 1 + [\alpha hr - (1 - \alpha)] \cos mw = 0, \\ \sin w - [\alpha hr - (1 - \alpha)] \sin mw = 0, \end{cases} \quad (18)$$

由此得到:

$$\cos w = 1 - \frac{1}{2} h^2 \tau^2 [\alpha h r - (1 - \alpha)]^2。 \quad (19)$$

如果步长  $h$  充分小,则  $\cos w < 1$ ,因为  $\tau$  为正实数,从式(19)得到:

$$w_k = \arccos(1 - \frac{1}{2} h^2 \tau^2 [\alpha h r - (1 - \alpha)]^2) + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, [\frac{m-1}{2}], \quad (20)$$

其中  $[\cdot]$  表示最大的整数函数。根据  $w = w_k$  可以找到一系列的时间延迟参数  $\tau_k$  满足方程(18)。

**引理 3** 设  $\lambda_k(\tau) = r_k(\tau)e^{iw_k(\tau)}$  是方程(16)在  $\tau = \tau_k$  附近满足  $r_k(\tau_k) = 1, w_k(\tau_k) = w_k$ , 则有:

$$\left. \frac{dr_k^2(\tau)}{dt} \right|_{\tau=\tau_k, w=w_k} > 0。$$

**证明** 从方程(16)得到:

$$\begin{aligned} \lambda^m &= \frac{(1-\alpha-\alpha h r)\tau}{\lambda-1}, \\ \left. \frac{dr_k^2(\tau)}{dt} \right|_{\tau=\tau_k, w=w_k} &= 2R(\bar{\lambda} \left. \frac{d\lambda}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_k, w=w_k}) = \frac{2(2m+1)(1-\cos w)}{[(m+1)\cos w-m]^2 + [(m+1)\sin w]^2} \Big|_{\tau=\tau_k, w=w_k} > 0. \end{aligned}$$

**定理 2** 对系统(11),下面的结论成立。

如果  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , 则平衡点  $y = 0$ , 当  $\tau \in (0, \tau_0)$  时是渐近稳定的, 当  $\tau > \tau_0$  时不稳定。对于方程(11), 当  $\tau = \tau_k, k = 0, 1, 2, \dots, [\frac{m-1}{2}]$  时, 在平衡点  $y = 0$  经历 Neimark-Sacker 分支。

**证明** 如果  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , 应用引理 2 和引理 3 及文献[20]的推论 2.4, 得到方程(16)的所有根, 当  $\tau \in (0, \tau_0)$  时模小于 1, 当  $\tau > \tau_0$  时, 至少有一对根模大于 1。因此结论成立。证毕。

### 3 离散控制模型中 Neimark-Sacker 分支方向和稳定性

笔者讨论 Neimark-Sacker 分支方向和稳定性。出现 Neimark-Sacker 分支的条件是  $\tau = \tau_k, k = 0, 1, \dots, [\frac{m-1}{2}]$ 。在这一部分笔者将应用规范型和中心流形定理研究当  $\tau = \tau_k$  处 Neimark-Sacker 分支和分支周期解的方向<sup>[21-25]</sup>。

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + [(1-\alpha)\tau h - \alpha \tau h r] y_{n-m} + \frac{\alpha \tau h r}{2} (y_{n-m}^2 - y_n y_{n-m}) + \frac{\alpha \tau h r}{2} (3y_n y_{n-m}^2 - 2y_{n-m}^3) + \\ &\quad O(|y_n^2 + y_{n-m}^2|^2). \end{aligned}$$

$$\text{因此对于系统(11),记为 } \mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{Y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{B}(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n) + \frac{1}{6}\mathbf{C}(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n) + O(\|\mathbf{Y}\|^4),$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n) &= (b_0(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n), 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{C}(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n) = (c_0(\mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n, \mathbf{Y}_n), 0, \dots, 0)^T, \\ \begin{cases} b_0(\phi, \psi) = \alpha \tau h r (-\phi_0 \psi_m - \phi_m \psi_0 + \phi_m \psi_m), \\ c_0(\phi, \psi, \eta) = \alpha \tau h r (\phi_0 \psi_m \eta_m + \phi_m \psi_0 \eta_m + \phi_m \psi_m \eta_0 - 2\phi_m \psi_m \eta_m). \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

设  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tau_0) \in C^{m+1}$  是矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值  $e^{iw_0}$  对应的一个特征向量, 则满足:  $\mathbf{A}\mathbf{q} = e^{iw_0} \mathbf{q}, \mathbf{A}\bar{\mathbf{q}} = e^{-iw_0} \bar{\mathbf{q}}$ 。

引入  $\mathbf{q}$  的伴随向量  $\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*(\tau) \in C^{m+1}$  满足:  $\mathbf{A}^T \mathbf{q}^* = e^{-iw_0} \mathbf{q}^*, \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{q}}^* = e^{iw_0} \bar{\mathbf{q}}^*$ , 满足单位化  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1$ ,

其中  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = \sum_{i=0}^m \bar{\mathbf{q}}_i^* \mathbf{q}_i$ 。

**引理 4** 定义一个向量值函数  $\mathbf{p}: C \rightarrow C^{m+1}$  满足:  $\mathbf{p}(\xi) = (\xi^m, \xi^{m-1}, \dots, 1)^T$ , 如果  $\xi$  是  $\mathbf{A}$  的一个特征值, 则  $\mathbf{A}\mathbf{p}(\xi) = \xi\mathbf{p}(\xi)$ 。根据引理 4, 得到:

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}(e^{iw_0}) = (e^{imw_0}, e^{i(m-1)w_0}, \dots, e^{iw_0}, 1)^T. \quad (22)$$

**引理 5** 设  $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \dots, q_m)$  是矩阵  $\mathbf{A}$  对应于特征值  $e^{iw_0}$  的特征向量,  $\mathbf{q}^* = (q_0^*, q_1^*, \dots, q_m^*)$  是矩阵  $\mathbf{A}^T$  对应于特征值  $e^{-iw_0}$  的特征向量, 且  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1$ , 则

$$\mathbf{q}^* = \bar{K}(1, \tilde{\alpha} e^{i\omega_0}, \tilde{\alpha} e^{i(m-1)\omega_0}, \dots, \tilde{\alpha} e^{2i\omega_0}, \tilde{\alpha} e^{i\omega_0}), \quad (23)$$

其中  $\tilde{\alpha} = (1-\alpha)\tau h - \alpha\tau h r$ ,

$$K = [e^{i\omega_0} + m\tilde{\alpha} e^{-i\omega_0}]^{-1}, \quad (24)$$

证明  $\mathbf{q}^*$  满足  $\mathbf{A}^T \mathbf{q}^* = \bar{z} \mathbf{q}^*$ ,  $\bar{z} = e^{-i\omega_0}$ , 则有一系列等式成立:

$$\begin{cases} \mathbf{q}_k^* = e^{-i\omega_0} \mathbf{q}_{k+1}^*, & k = 2, 3, \dots, m, \\ \tilde{\alpha} \mathbf{q}_0^* = e^{-i\omega_0} \mathbf{q}_m^*, \end{cases} \quad (25)$$

则  $\mathbf{q}_m^* = \tilde{\alpha} e^{i\omega_0} \bar{K}$ , 再有单位化  $\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1$  的条件, 得到式(23)和式(24)的结果。

记  $T_{\text{center}}$  为对应于特征值  $e^{\pm i\omega_0}$  的特征空间, 它是由  $\{\text{Re}(\mathbf{q}), \text{Im}(\mathbf{q})\}$  生成的二维空间,  $\text{Im}(\mathbf{q})$  表示复数的虚部。 $T_{\text{stable}}$  是矩阵  $\mathbf{A}^T$  对应的除去  $e^{\pm i\omega_0}$  之外的特征值的特征向量生成的  $(m-1)$  维实空间。

任意的  $\mathbf{x} \in R^{m+1}$  可以分解为  $\mathbf{x} = \mathbf{v}\mathbf{q} + \bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{y}$ , 这里  $\mathbf{v} \in C, \mathbf{v}\mathbf{q} + \bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{q}} \in T_{\text{center}}, \mathbf{y} \in T_{\text{stable}}$ , 复变量  $\mathbf{v}$  看成是  $\mathbf{x}$  在  $T_{\text{center}}$  上的坐标, 得到:  $\mathbf{v} = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle, \mathbf{y} = \mathbf{x} - \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{x} \rangle \mathbf{q} - \langle \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{x} \rangle \bar{\mathbf{q}}$ , 设  $a(\lambda)$  是  $\mathbf{A}$  的特征多项式,  $\lambda_0 = e^{i\omega_0}$ , 根据文献[18]的算法和文献[19]中相似的计算过程, 得到:

$$\begin{aligned} g_{20} &= \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle, \quad g_{11} = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle, \quad g_{02} = \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle, \\ g_{21} &= \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}, w_{20}) \rangle + 2\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{B}(\mathbf{q}, w_{11}) \rangle + \langle \mathbf{q}^*, \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle, \end{aligned}$$

这里,

$$\begin{aligned} w_{20} &= \frac{b_0(\mathbf{q}, \mathbf{q})}{a(\lambda_0^2)} p(\lambda_0^2) - \frac{\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle}{\lambda_0^2 - \lambda_0} \mathbf{q} - \frac{\langle \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \mathbf{q}) \rangle_-}{\lambda_0^2 - \bar{\lambda}_0} \bar{\mathbf{q}}, \\ w_{11} &= \frac{b_0(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}})}{a(1)} p(1) - \frac{\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle}{1 - \lambda_0} \mathbf{q} - \frac{\langle \bar{\mathbf{q}}^*, \mathbf{B}(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) \rangle_-}{1 - \bar{\lambda}_0} \bar{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

定义

$$c_1(\tau_0) = \frac{g_{20} g_{11} (1 - 2\lambda_0)}{2(\lambda_0^2 - \lambda_0)} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\lambda}_0} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\lambda_0^2 - \bar{\lambda}_0)} + \frac{g_{21}}{2}, \quad (26)$$

由式(21)和式(22)及引理 5, 得到:

$$\begin{cases} b_0(\bar{\mathbf{q}}, p(e^{2i\omega_0})) = \alpha\tau h r (-e^{i\omega_0} - e^{2i\omega_0} + 1), \\ b_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \alpha\tau h r (-2e^{i\omega_0} + 1), \\ b_0(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \alpha\tau h r (-e^{i\omega_0} - e^{-i\omega_0} + 1), \\ b_0(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}) = \alpha\tau h r (-2e^{-i\omega_0} + 1), \\ b_0(\mathbf{q}, p(1)) = \alpha\tau h r e^{-i\omega_0}, \\ c_0(\mathbf{q}, \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}) = \alpha\tau h r (4e^{i\omega_0} + 2e^{-i\omega_0} - 2), \\ a(e^{2i\omega_0}) = e^{i(2m+1)\omega_0} - e^{-2i\omega_0} + 1, \\ a(1) = 1. \end{cases} \quad (27)$$

最终通过替代得到  $c_1(\tau_0)$ 。

**引理 6** 对映射(12), 假定:

1)  $\lambda(\tau) = r(\tau) e^{i\omega(\tau)}$ , 这里  $r(\tau^*) = 1, r'(\tau^*) \neq 0$ , 并且  $w(\tau^*) = w^*$ ; 2)  $e^{ikw^*} \neq 1, k = 1, 2, 3, 4$ ; 3)  $\text{Re}[e^{-i\omega^*} c_1(\tau^*)] \neq 0$ , 有下面 4 种可能的情况:

①  $r'(\tau^*) > 0, \text{Re}[e^{-i\omega^*} c_1(\tau^*)] < 0$ . 当  $\tau < \tau^*$  时, 原点是渐近稳定的不动点, 当  $\tau > \tau^*$  时, 原点是不稳定的不动点, 且存在一个渐近稳定的闭的不变曲线;

②  $r'(\tau^*) > 0, \text{Re}[e^{-i\omega^*} c_1(\tau^*)] > 0$ , 当  $\tau < \tau^*$  时, 原点是渐近稳定的不动点, 当  $\tau > \tau^*$  时, 原点是不稳定的不动点, 且存在一个不稳定的闭的不变曲线;

③  $r'(\tau^*) < 0, \text{Re}[e^{-i\omega^*} c_1(\tau^*)] < 0$ . 当  $\tau > \tau^*$  时, 原点是渐近稳定的不动点, 当  $\tau < \tau^*$  时, 原点是不稳定的不动点, 且存在一个渐近稳定的闭的不变曲线;

④  $r'(\tau^*) < 0, \text{Re}[e^{-i\omega^*} c_1(\tau^*)] > 0$ . 当  $\tau > \tau^*$  时, 原点是渐近稳定的不动点, 当  $\tau < \tau^*$  时, 原点是不稳定的不动点, 且存在一个不稳定的闭的不变曲线。

通过以上讨论, 得到  $r'(\tau^*) > 0$ , 因此, 由引理 6 得到下面的结论。

**定理3** 如果  $r > \frac{1-\alpha}{\alpha}$ , 当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时,  $y=0$  是渐近稳定的不动点, 当  $\tau > \tau_0$  时,  $y=0$  是不稳定的。

Neimark-Sacker 分支的方向和稳定性由  $\text{Re}[e^{-iw^*} c_1(\tau^*)]$  的符号决定。如果  $\text{Re}[e^{-iw^*} c_1(\tau^*)] < 0 (> 0)$ , 则当  $\tau > \tau_0$  时存在唯一吸引的(排斥的)不变曲线。

#### 4 数值模拟

笔者通过数值试验检验第 1 至第 3 部分的结果。假定  $r=1, h=0.05$ 。当控制参数  $\alpha=0.6, 0.8$  时, 结果如图 1 和图 2 所示。表 1 给出了在不同  $\alpha$  值时的  $\tau_0$  值。

表 1 混合控制欧拉法的值

Tab.1 Values of Hybrid control Euler method

$\alpha$	0.6	0.8	1	1.2	2
$\tau_0$	7.66	2.55	1.53	1.09	0.51

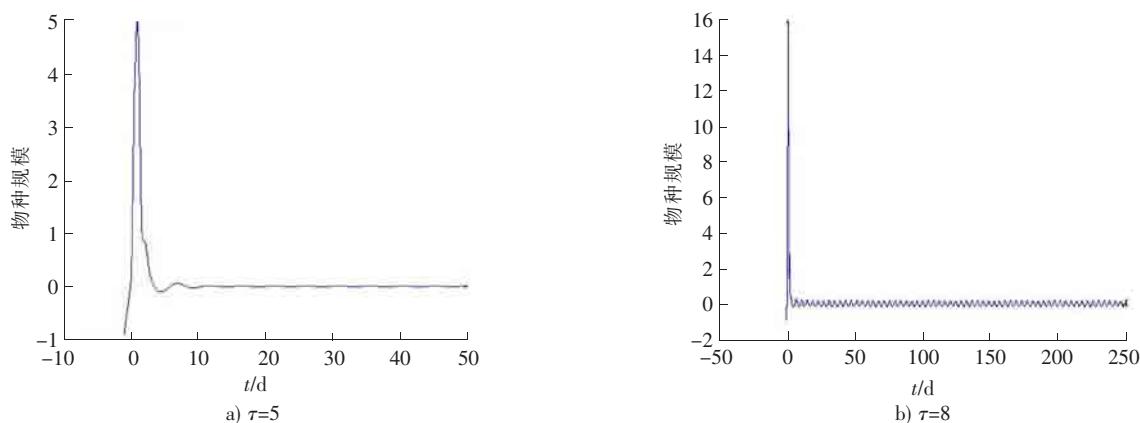


图 1 方程(4)应用欧拉法的数值解, 步长  $h=1/20, \alpha=0.6$

Fig.1 Numerical solution of Eq.(4) with the Euler method corresponding to step-size  $h = 1/20$  when  $\alpha = 0.6$

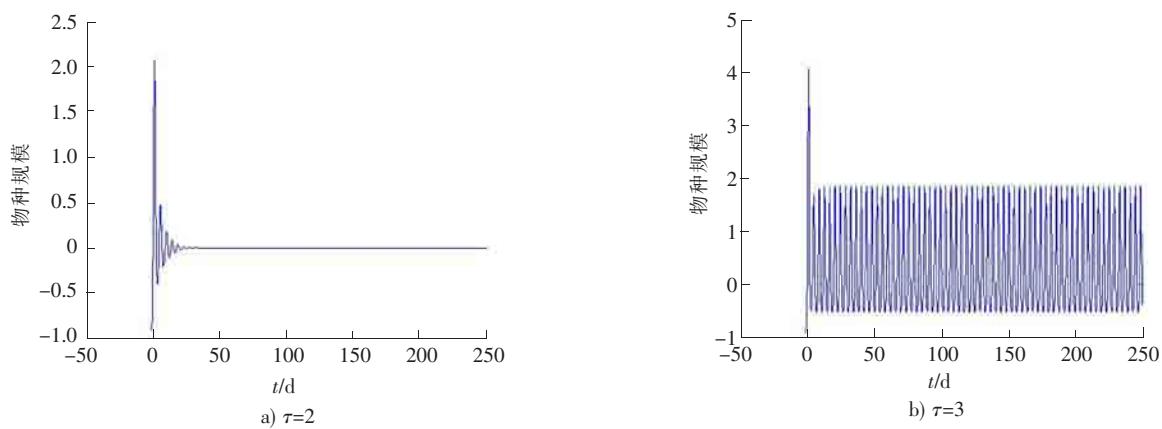


图 2 方程(4)应用欧拉法的数值解, 步长  $h=1/20, \alpha=0.8$

Fig.2 Numerical solution of Eq.(4) with the Euler method corresponding to step-size  $h = 1/20$  when  $\alpha = 0.8$

通过表 1, 可以看出当  $\alpha=1$  时为不加控制的情况; 当  $\alpha<1$  时, 分支点延迟出现; 当  $\alpha>1$  时, 分支点提前出现。图 1 和图 2 为当  $\alpha=0.8, \tau=3$  时已经出现分支, 而  $\alpha=0.6$ , 在  $\tau=5$  时系统仍然是渐近稳定的。

#### 5 结 论

为了扩大或者缩小控制区域, 给出了应用状态反馈和参数扰动的混合控制数值欧拉法得到了 Neimark-Sacker 分支。对 Gompertz 连续系统实施混合控制得到了 Hopf 分支; 通过选择合适的控制参数, 实施混合控制数值算法延迟了原来分支点的出现, 应用混合控制欧拉法, 对充分小的步长给出了保持分支的结果。通

过理论和数值模拟验证了所得结果,得到了延迟 Gompertz 模型系统通过选择合适的控制参数,分支点可能提前或者延迟。在将来的研究计划中,笔者将设计更好的数值控制方法,达到更好的控制效果。

### 参考文献/References:

- [1] LOPEZ-GOMEZ J, ORTEGA R, TINEO A. The periodic predator-prey Lotka-Volterra model[J]. Advances in Differential Equations, 1996,1(3): 403-423.
- [2] PIOTROWSKA M J, FORYS U. Analysis of the Hopf bifurcation for the family of angiogenesis models[J]. Journal of Mathematical Analysis Applications, 2011,382(1):180-203.
- [3] JIA Jianwen, LI Chunhua. A Predator-Prey Gompertz model with time delay and impulsive perturbations on the prey[J]. Discrete Dynamics in Nature Society, 2009(1026):332-337.
- [4] DONG Lingzhen, CHEN Lansun, SUN Lihua. Optimal harvesting policies for periodic Gompertz systems[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2007,8(2):572-578.
- [5] 沈启宏,魏俊杰.具时滞的人类呼吸系统模型的稳定性与分支[J].应用数学和力学, 2004,25(11):1169-1181.  
SHENG Qihong, WEI Junjie. Stability and bifurcation of a human respiratory system model with time delay[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004,25(11):1169-1181.
- [6] 魏俊杰,张春蕊,李秀玲.具时滞的二维神经网络模型的分支[J].应用数学和力学,2005,26(2):193-200.  
WEI Junjie, ZHENG Chunrui, LI Xiuling. Bifurcation in a two-dimensional neural network model with delay[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2005,26(2):193-200.
- [7] YU Pei, CHEN Guanrong. Hopf bifurcation control using nonlinear feedback with polynomial functions[J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 2004,14(5): 1683-1704.
- [8] YU Pei. Bifurcation control for a class of Lorenze-like systems[J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 2011,21(9): 2647-2664.
- [9] CHEN G, MOIOLA J L, WANG H O. Bifurcation control: theories, methods, and applications[J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 2000,10(3): 511-548.
- [10] HILL D J, HISKEINS I A, WANG Y. Robust, adaptive or nonlinear control for modern power systems[C]// Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control. San Antonio:IEEE Xplore,1993:2335-2340.
- [11] CHEN Z, YU P. Hopf bifurcation control for an internet congestion model[J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 2005,15(8): 2643-2651.
- [12] LIU Zengrong, CHUNG K W. Hybrid control of bifurcation in continuous nonlinear dynamical systems[J]. International Journal of Bifurcation Chaos, 2005,15(12): 3895-3903.
- [13] CHENG Zunshui, CAO Jinde. Hybrid control of Hopf bifurcation in complex networks with delays[J]. Neuro Computing, 2014,131: 164-170.
- [14] SU Huan, DING Xiaohua. Dynamics of a nonstandard finite-difference scheme for Mackey-Glass system[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008,344(2): 932-941.
- [15] DING Xiaohua, FAN Dejun, LIU Mingzhu. Stability and bifurcation of a numerical discretization Mackey-Glass system[J]. Chaos, Solitons, Fractals, 2007,34(2): 383-393.
- [16] 张春蕊,刘明珠.双时滞神经网络模型分支性的数值逼近[J].系统仿真学报,2004,16,(4):797-799.  
ZHANG Chunrui, LIU Mingzhu. Hopf bifurcations in numerical approximation for neural network model with two delays[J]. Journal of System Simulation, 2004,16(4):797-799.
- [17] WANG Yuanyuan. Dynamics of a nonstandard finite-difference scheme for delay differential equations with unimodal feedback[J]. Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation, 2012,17(10): 3967-3978.
- [18] SU Huan, MAO Xuerong, LI Wenxue. Hopf bifurcation control for a class of delay differential systems with discrete-time delayed feedback controller[J]. Chaos, 2016, 26(11): 113120.
- [19] WULF V, FORD N. J. Numerical Hopf bifurcation for a class of delay differential equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000,115(1): 601-616.
- [20] RUAN Shigui, WEI Junjie. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays[J]. Dynamics of Continuous Discrete Impulsive Systems, 2003,10(6): 863-874.
- [21] YURI A K. Elements of Applied Bifurcation Theory[M]. New York:Springer-Verlag, 1995.
- [22] KUZNETSOV Y. Elements of Applied Bifurcation Theory[M]. New York:Springer-Verlag, 1995.
- [23] HALE J. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York:Springer-Verlag, 1977.
- [24] WULF V. Numerical Analysis of Delay Differential Equations Undergoing a Hopf Bifurcation[D]. Liverpool: University of Liverpool, 1999.
- [25] WIGGINS S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos[M]. New York:Springer-Verlag, 1990.