第 39 卷第 4 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol.39，No.4
2018 年 8 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Aug. 2018

文章编号：1008-1542(2018)04-0321-10　　**doi：10.7535/hbkd.2018yx04005**

边界条件依赖谱参数的非连续 Sturm-Liouville 算子的谱问题

闫　丽，魏广生

（陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西西安　710062）

摘　要：为了丰富 Sturm-Liouville(S-L)微分算子的谱理论，研究了闭区间[0，1]上边界条件依赖谱参数的非连续 S-L 问题。首先利用该问题在直和空间上的等价刻画，给出了非连续 S-L 问题特征值与连续 S-L 问题特征值间的交替关系，即在非连续 S-L 问题的特征值的每个开子区间内都恰有连续 S-L 问题的一个特征值，进而由连续 S-L 问题的振荡理论推出非连续 S-L 问题的振荡理论。然后通过 Prüfer 变换和 Hergloz 函数的转换，建立了边界条件依赖谱参数的非连续 S-L 问题与边界条件为常值的非连续 S-L 问题的转换，得出转换后的特征值与转换前(除去有限个)的特征值相等。最后通过构造边界条件为常值的非连续 S-L 问题的特征函数求得其特征值的渐近式，从而得到了边界条件依赖谱参数的非连续 S-L 问题的特征值的渐近表达式。新的研究方法可推广到对间断点条件依赖谱参数的 S-L 问题研究。

关键词：算子代数；Sturm-Liouville 微分算子；非连续条件；参数边界条件

中图分类号：O175.1　　**MSC(2010)主题分类：**47A75　　**文献标志码：**A

Spectral distribution problem for Sturm-Liouville with operators the discontinuity conditions at an interior point and boundary conditions depending on the eigenparameter

YAN Li，WEI Guangsheng

(College of Mathematics and Information Science，Shaanxi Normal University，Xi'an，Shaanxi 710062，China)

Abstract：In order to enrich the spectral theory of Sturm-Liouvillel (S-L) differential operators，the discontinuous S-L problem with boundary conditions dependent on spectral parameters on closed interval [0，1] is studied. Firstly，by using the equivalent characterization of the problem in the direct sum space，the alternating relation between the eigenvalues of the discontinuous S-L problem and the eigenvalues of the continuous S-L problem is given. That is，there is exactly one eigenvalue of the continuous S-L problem in every open subinterval of the eigenvalues of the discontinuous S-L problem，and then the oscillation theory of the discontinuous S-L problem is derived from the oscillation theory of the continuous S-L problem. Through the transforma-

收稿日期：2018-03-23；修回日期：2018-05-12；责任编辑：张　军
基金项目：国家自然科学基金(11571212)
第一作者简介：闫　丽(1990—)，女，陕西宝鸡人，硕士研究生，主要从事微分算子谱及逆谱理论方面的研究。
通信作者：魏广生教授。E-mail：Weimath@vip.sina.com

闫丽，魏广生.边界条件依赖谱参数的非连续 Sturm-Liouville 算子的谱问题[J].河北科技大学学报，2018，39(4)：321-330.
YAN Li，WEI Guangsheng.Spectral distribution problem for Sturm-Liouville with operators the discontinuity conditions at an interior point and boundary conditions depending on the eigenparameter[J].Journal of Hebei University of Science and Technology，2018，39(4)：321-330.

tions of Prüfer and Hergloz function, the transformation between the discontinuous S-L problem with boundary conditions dependent spectral parameters and discontinuous S-L problem with constant boundary conditions is established. The obtained converted eigenvalues are equal to those (excluding the finite eigenvalues) before the conversion. Finally, the asymptotic expressions of eigenvalues of discontinuous S-L problems with boundary conditions dependent on spectral parameters are obtained by constructing the eigenfunctions of discontinuous S-L problems with constant boundary conditions. The new research method can be extended to the study of the S-L problem with boundary conditions dependent spectral parameters.

Keywords: operator algebras; Sturm-Liouville differential operator; discontinuity conditions; eigenparameter-dependent boundary condition

Sturm-Liouville(简称 S-L)微分算子理论在研究许多数学物理问题中有重要的作用,其特征值问题长期以来受到物理学界和数学学界的关注。其中,非连续 S-L 问题基于许多物理背景和实际应用问题,例如:中间有结点的弦振动问题[1-4]、衍射问题[5-7]、质量转移问题[8-10]以及薄的叠层板块的热传导问题[11-13];再比如地球物理中,地壳底部横波的反射[14-16]也会导致相应的 S-L 问题不连续,会产生一个跨越界面的条件,这个条件一般称之为"界面条件"或"转移条件",即特征函数及其导数产生间断点。

考虑 S-L 问题:

$$ly:=-y''+q(x)y=\lambda y,\quad x\in[0,1]\backslash\{\frac{1}{2}\},\tag{1}$$

赋予分离型边界条件:

$$U(y):=y(0)\cos\alpha-y'(0)\sin\alpha=0,\quad \alpha\in[0,\pi),\tag{2}$$

$$V(y):=(\frac{y'}{y})(1)-f(\lambda)=0\tag{3}$$

和非连续条件:

$$P(y):=y(\frac{1}{2}-)-y(\frac{1}{2}+)=0,\tag{4}$$

$$Q(y):=y'(\frac{1}{2}-)-y'(\frac{1}{2}+)+by(\frac{1}{2}-)=0\tag{5}$$

的谱问题。这里 $\lambda\in\mathbf{C}$ 为谱参数,势函数 $q(x)\in L^2[0,1]$为实值函数,

$$f(\lambda)=a\lambda+b-\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda-c_k},\tag{6}$$

其中 $a,b,b_k,c_k\in\mathbf{R}$ 且 $a\geqslant0,b_k\geqslant0,c_1<c_2<\cdots<c_N,N\geqslant0$。熟知,问题(1)—问题(5)是自伴的,故其特征值为实的、简单的[17-18]。特别地,当 $b=0$ 时,该问题就退化成常规 S-L 问题(1)—问题(3)。记问题(1)—问题(3)和问题(1)—问题(5)的特征值为$\{\eta_n\}_{n=0}^{+\infty}$和$\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$。

对于非连续 S-L 问题(1)—问题(5)的特征值问题,经典结论都是借助慑动的方法,利用 $q(x)\equiv0$ 时非连续 S-L 问题的特征值$\{\lambda_n^0\}_{n=0}^{+\infty}$进行刻画,然而$\{\lambda_n^0\}_{n=0}^{+\infty}$本身也是无法精细估计[19-21]。本文通过直和空间的等价刻画,给出非连续的 S-L 问题的特征值与连续 S-L 问题的特征值间的交替关系。作为应用,将文献[1]中的结论推广到非连续 S-L 问题上,讨论了特征值$\{\lambda_n^0\}_{n=0}^{+\infty}$的渐近式。

1 预备知识

这一节将给出连续且边界条件依赖谱参数的 S-L 问题的相关理论,这些为结论的证明提供必要的准备。

考虑 Herglotz 函数集合:

$$R_N=\{f:f(\lambda)=a\lambda+b-\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda-c_k},a,b,b_k,c_k\in\mathbf{R},a\geqslant0,b_k\geqslant0,c_1<c_2<\cdots<c_N,N\geqslant0\},$$

令 R_N^+ 标识 $a>0$ 时 R_N 子集,令 R_N^0 标识 $a=0$ 时 R_N 子集。

令常数 $\mu<c_1$,并且:

$$F(\lambda)=\frac{\mu-\lambda}{f(\lambda)-f(\mu)}-f(\mu), \tag{7}$$

特别地，若 $f\in R_N$，则 $F\in R_M$，即：

$$F(\lambda)=A\lambda+B-\sum_{k=1}^{M}\frac{B_k}{\lambda-C_k}。 \tag{8}$$

令 $\{\eta_i^D\}_{i=0}^{+\infty}$ 是 S-L 问题的特征值：

$$\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y,\\ y(0)\cos\alpha-y'(0)\sin\alpha=0,\quad \alpha\in[0,\pi),\\ y(1)=0,\end{cases}$$

令 $\{\eta_i^{cD}\}_{i=0}^{+\infty}=\{c_j\}_{j=0}^{+\infty}\cup\{\eta_i^D\}_{i=0}^{+\infty}$（按代数重数计算）并按递增顺序排列，且 $k_j=\#\{c_i\leqslant\eta_j\}$。

基于上述记号，给出下面的性质。

引理 1[22]

1）若 $f\in R_N^+$，则 $F\in R_N^0$ 并且 $\mu<c_1<C_1<c_2<\cdots<c_N<C_N$；

2）若 $f\in R_N^0$，则 $F\in R_{N-1}^+$ 并且 $\mu<c_1<C_1<c_2<\cdots<C_{N-1}<c_N$。

注 1　通过转换可将 R_N^+ 映射到 R_N^0，因此可将边界条件属于 R_N^+ 的S-L问题转换为常值边界条件的 S-L 问题。

引理 2[22]

1）η_i 和 η_i^{cD} 具有交替关系：$\eta_0<\eta_0^{cD}\leqslant\eta_1\leqslant\eta_1^{cD}\leqslant\cdots$；

2）$c_{k_j}\leqslant\eta_j\leqslant c_{k_j+1}$；

3）令 $\eta_{-1}^D=-\infty$，对于所有 $j\geqslant 0$，有 $\eta_{j-1-k_j}^D<\eta_j\leqslant\eta_{j-k_j}^D$。

引理 3[22]　S-L 问题(1)—问题(3)($f\in R_N$)可转换为如下 S-L 问题：

$$\begin{cases}-y''+q_0 y=\mu y,\\ \dfrac{y'}{y}(j)=\cot\alpha_j,\quad j=0,1,\end{cases}$$

其特征值为 $\{\mu_j\}_{j=0}^{+\infty}$，其中：

1）如果 $\alpha>0$，$f\in R_N^+$，那么 $\alpha_0=0$，$\mu_j=\eta_{j+N+1}$；

2）如果 $\alpha=0$，$f\in R_N^0$，那么 $\alpha_0=0$，$\mu_j=\eta_{j+N}$；

3）其余情况下，$\alpha_0>0$，$\mu_j=\eta_{j+N}$。

令 S-L 问题(1)—问题(5)的解空间为

$$H=\{y\in L^2[0,1]:y,y'\in AC[0,1],ly\in L^2[0,1],U(y)=V(y)=P(y)=Q(y)=0\},$$

令

$$H_{1/2}^-=\{y\in H:y|[\frac{1}{2},1]=0\};$$

$$H_{1/2}^+=\{y\in H:y|[0,\frac{1}{2}]=0\};$$

$$H_{1/2}=\{y\in H:y(\frac{1}{2})=0\},$$

以及

$$S_{1/2}(\lambda)=\{y\in H:y|[0,\frac{1}{2}]\in L^2[0,\frac{1}{2}],y|[\frac{1}{2},1]\in L^2[\frac{1}{2},1],$$

$$(l-\lambda)y=0,x\in[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1],U(y)=V(y)=0\}。$$

注 2　由于 $y\in H$，因此，若 $y\in S_{1/2}(\lambda)$，则 $y(\frac{1}{2}-)=y(\frac{1}{2}+)$，但 y 的导数在 $x=\frac{1}{2}$ 点处是间断的。

引理 4 设 $y,\tilde{y}\in L^2[0,1]$，则

$$\int_0^1 (ly)\tilde{y}\,\mathrm{d}x=\delta_0(y,\tilde{y})-\delta_1(y,\tilde{y})+\int_0^1 P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x, \tag{9}$$

其中：$\delta_x(y,\tilde{y})=y'(x)\tilde{y}(x)$；$P(y,\tilde{y})=y'\tilde{y}'+q(x)y\tilde{y}$。

若 $y\in S_{1/2}(\lambda)$，$\tilde{y}\in H_{1/2}^-$，则存在 $\beta_0(y,\tilde{y})$ 和 $\beta_1(y,\tilde{y})$ 使得：$\delta_0(y,\tilde{y})=\beta_0(y,\tilde{y})$，$\delta_1(y,\tilde{y})=\beta_1(y,\tilde{y})$。

令 $E(y,\tilde{y})=\beta_0(y,\tilde{y})-\beta_1(y,\tilde{y})+\int_0^1 P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x$，$E_\lambda(y,\tilde{y})=E(y,\tilde{y})-\lambda\int_0^1 (y\tilde{y})\,\mathrm{d}x$。

注 3 $H_{1/2}^-$ 和 $H_{1/2}^+$ 关于 $E_\lambda(y,\tilde{y})$ 是正交的，并且 $H_{1/2}=H_{1/2}^-\oplus H_{1/2}^+$。

2 主要结论与证明

这一节给出主要结论，即问题(1)—问题(3)和问题(1)—问题(5)的特征值满足交替关系，并给出问题(1)—问题(5)的振荡理论和特征值渐近式。

定理 1

1)$S_{1/2}(\lambda)$ 关于 $E_\lambda(y,\tilde{y})$ 是 $H_{1/2}^-$ 的正交补；

2)如果 $y(\frac{1}{2}-,\lambda)\neq 0$，$y(\frac{1}{2}+,\lambda)\neq 0$，那么 $H=H_{1/2}\oplus S_{1/2}(\lambda)$。

证明 1)首先证明 $S_{1/2}(\lambda)$ 和 $H_{1/2}^-$ 是正交的。

令 $y\in S_{1/2}(\lambda)$，$\tilde{y}\in H_{1/2}^-$，则 $\int_0^1 (ly)\tilde{y}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1/2}(ly)\tilde{y}\,\mathrm{d}x$。由引理 4 可得：

$$\int_0^{1/2}(ly)\tilde{y}\,\mathrm{d}x=\delta_0(y,\tilde{y})-\delta_{1/2}(y,\tilde{y})+\int_0^{1/2}P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x,$$

由于 $y\in S_{1/2}(\lambda)$，$\tilde{y}\in H_{1/2}^-$，因此，

$$\delta_0(y,\tilde{y})=\beta_0(y,\tilde{y}),$$

$$\delta_{1/2}(y,\tilde{y})=\beta_{1/2}(y,\tilde{y})=y'(\frac{1}{2})\tilde{y}(\frac{1}{2})=0,$$

$$\int_0^{1/2}P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x=\int_0^1 P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x,$$

并且 $\beta_1(y,\tilde{y})=0$，即 $\int_0^1 P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x=E(y,\tilde{y})$。因此 $E_\lambda(y,\tilde{y})=\int_0^1(l-\lambda)y\tilde{y}\,\mathrm{d}x=0$，即 $S_{1/2}(\lambda)$ 和 $H_{1/2}^-$ 是正交的。相似地，$S_{1/2}(\lambda)$ 和 $H_{1/2}^+$ 也是正交的，即 $S_{1/2}(\lambda)$ 包含在 $H_{1/2}$ 的正交补里。

下面证明 $y\in H$ 和 $H_{1/2}^-$ 是正交的。由定理 1 中结论 1) 知，只需证明 $y\in S_{1/2}(\lambda)$。

由于

$$E_\lambda(y,\tilde{y})=0,\quad \forall\,\tilde{y}\in H_{1/2},$$

并且 $y\in L^2[0,\frac{1}{2}]\cup L^2[\frac{1}{2},1]$，以此对任意的 $\tilde{y}\in H_{1/2}\cap L^2[0,1]$，下式成立，

$$\begin{aligned}\int_0^1(ly)\tilde{y}\,\mathrm{d}x&=-\delta_0(y,\tilde{y})-\delta_{1/2}(y,\tilde{y})+\int_0^1 P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x=\\&\delta_0(y,\tilde{y})-\delta_1(y,\tilde{y})+\int_0^1 P(y,\tilde{y})\,\mathrm{d}x=\\&(\delta_0(y,\tilde{y})-\beta_0(y,\tilde{y}))+(\beta_1(y,\tilde{y})-\delta_1(y,\tilde{y}))+E(y,\tilde{y}),\end{aligned}$$

即

$$\int_0^1(l-\lambda)y\tilde{y}\,\mathrm{d}x=(\delta_0(y,\tilde{y})-\beta_0(y,\tilde{y}))+(\beta_1(y,\tilde{y})-\delta_1(y,\tilde{y})),$$

因此,

$$(l-\lambda)y=0,\quad \forall x\in[0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1],$$

$$\delta_0(y,\tilde{y})=\beta_0(y,\tilde{y}),\tag{10}$$

$$\delta_1(y,\tilde{y})=\beta_1(y,\tilde{y})。\tag{11}$$

式(10)— 式(11) 说明 y 满足边界条件 2) 和条件 3),即验证了所有 $y\in S_{1/2}(\lambda)$ 的必要性质。

2) 令$\{\lambda_n^-\}_{n=0}^{+\infty}$ 和$\{\lambda_n^+\}_{n=0}^{+\infty}$ 分别是下面 2 个 S-L 问题的特征值:

$$\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y,\\ y(0)\cos\alpha-y'(0)\sin\alpha=0,\quad \alpha\in[0,\pi),\\ y(\frac{1}{2})=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y,\\ y(\frac{1}{2})=0,\\ (\frac{y'}{y})(1)-f(\lambda)=0,\end{cases}$$

由于 $y(\frac{1}{2}-,\lambda)\neq 0,y(\frac{1}{2}+,\lambda)\neq 0$,因此 $\lambda\notin\{\lambda_n^-\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^+\}_{n=0}^{+\infty}$。

令

$$E_\lambda(y,\tilde{y})=0,\quad \forall\tilde{y}\in H,\tag{12}$$

λ 为问题(1)— 问题(5) 的一个特征值,当且仅当存在 $y\in H(y\neq 0)$ 满足式(12)。由于 $\lambda\notin\{\lambda_n^-\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^+\}_{n=0}^{+\infty}$,因此对于任意 $\tilde{y}\in H_{1/2}$ 不存在 $y\in H_{1/2}(y\neq 0)$ 满足式(12),即 λ 不是 $H_{1/2}$ 的特征值。

要证明结论 2),只需证明对于任意 $y\in H_{1/2}$ 和任意 $y_0\in H$,存在 $y_h\in H_{1/2}$ 使得 $E_\lambda(y_0-y_h,y)=0$。由结论 1) 可得 $y_0-y_h=s\in S_{1/2}(\lambda)$,因此,只需证明对于任意 $y\in H_{1/2}$,存在 $y_h\in H_{1/2}$ 使得 $E_\lambda(y_h,y)=E_\lambda(y_0,y)$。由于$\lambda$ 不是$H_{1/2}$ 的特征值,因此对于任意的连续线性函数 $f:H_{1/2}\to\mathbf{R}$ 和任意的 $y\in H_{1/2}$,存在唯一 $y_h\in H_{1/2}$ 使得 $E_\lambda(y_h,y)=f(\lambda)$。因此,对于所有 $y\in H_{1/2}$ 存在唯一 $y_h\in H_{1/2}$,使得 $E_\lambda(y_h,y)=E_\lambda(y_0,y)$,故定理 1 证毕。

下面考虑直和空间 $H=H_{1/2}\oplus S_{1/2}(\lambda)$ 上的 S-L 问题(1)— 问题(5)。

引理 5[23]　令$\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 为直和空间上 S-L 问题(1)— 问题(5) 的特征值,则

$$\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}=\{\lambda_n^-\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^+\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^S\}_{n=0}^{+\infty}。$$

引理 6[23]　将$\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}=\{\lambda_n^-\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^+\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^S\}_{n=0}^{+\infty}$ 重新排列,构成 $\mathbf{R}$ 的一个划分,记为

$$-\infty<\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n<\cdots,$$

则

1) 在划分的每个开子区间$(\lambda_{n-1},\lambda_n)(n=0,1,\cdots)$ 内都恰有 S-L 问题(1)— 问题(3) 的一个特征值 η_n;

2) 若某个 $\lambda_k\in\{\lambda_n^-\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^+\}_{n=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_n^S\}_{n=0}^{+\infty}$,则 λ_k 是问题(1)— 问题(3) 的一个特征值。

由引理 5 和引理 6 可得定理 2。

定理 2　设非连续的 S-L 问题(1)— 问题(5) 和连续的 S-L 问题(1)— 问题(3) 的特征值分别记为$\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ 和$\{\eta_n\}_{n=0}^{+\infty}$,则下述关系成立:

$$-\infty:=\lambda_{-1}<\eta_0<\lambda_0\leqslant\eta_1\leqslant\lambda_1\leqslant\cdots,\tag{13}$$

其中等号成对出现,且仅出现在子段 $\lambda_{n-1}=\eta_n=\lambda_n$ 中。

注 4　不等式(13) 沟通了非连续和连续 S-L 问题之间的特征值,提供了一个利用连续问题(1)— 问题(3) 的特征值分析非连续问题(1)— 问题(5) 特征值性质的有力工具。

令$\{\lambda_i^D\}_{n=0}^{+\infty}$ 为下面 S-L 问题的特征值:

$$\begin{cases}-y''+q(x)y=\lambda y,\\ y(0)\cos\alpha-y'(0)\sin\alpha=0,\quad \alpha\in[0,\pi),\\ y(1)=0,\\ y(\frac{1}{2}-)-y(\frac{1}{2}+)=0,\\ y'(\frac{1}{2}-)-y'(\frac{1}{2}+)+by(\frac{1}{2}-)=0。\end{cases}$$

由定理2可知，$\{\eta_i^D\}_{n=0}^{+\infty}$ 和 $\{\lambda_i^D\}_{i=0}^{+\infty}$ 满足交替关系：$\eta_0^D<\lambda_0^D\leqslant\eta_1^D\leqslant\lambda_1^D\leqslant\cdots$，其中等号成对出现，且仅出现在子段 $\lambda_{n-1}^D=\eta_n^D=\lambda_n^D$ 中。令 $\{\lambda_i^{cD}\}_{i=0}^{+\infty}=\{c_j\}_{j=0}^{+\infty}\cup\{\lambda_i^D\}_{i=0}^{+\infty}$（按代数重数计算）并按递增顺序排列。令 $\tilde{k}_j=\#\{c_i\leqslant\lambda_j\}$，显然，$\tilde{k}_j=k_j$。由引理2可得定理3。

定理3

1) λ_i 和 λ_i^{cD} 具有交替关系：$\lambda_0<\lambda_0^{cD}\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_1^{cD}\leqslant\cdots$；

2) $c_{\tilde{k}_j}\leqslant\lambda_j\leqslant c_{\tilde{k}_j+1}$；

3) 令 $\lambda_{-1}^D=-\infty$，对于任意 $j\geqslant0$，有 $\lambda_{j-1-\tilde{k}_j}^D<\lambda_j\leqslant\lambda_{j-\tilde{k}_j}^D$。

由此给出问题(1)— 问题(5) 的振荡理论。注意到：若 $\lambda\in(\lambda_{i=1}^D,\lambda_i^D]$，则在开区间(0,1) 上内部点间断的问题(1)— 问题(2) 的解有 i 个零点。

推论1 令 ω_j 是 λ_j 对应的特征函数的零点个数，则 $\omega_j=j-k_j$，特别地，$\omega_0=0$，当 $\lambda_j>c_N$ 时，$\omega_j=j-N$。

由推论1和引理3可得定理4。

定理4 对于S-L问题(1)— 问题(5)，$f\in R_N$，存在如下S-L问题：

$$\begin{cases}-y''+\tilde{q}_0y=\tilde{\mu}y,\\ (\frac{y'}{y})(j)=\cot\tilde{\alpha}_j,\quad j=0,1,\\ y(\frac{1}{2}-)=y(\frac{1}{2}+),\\ y'(\frac{1}{2}-)=y'(\frac{1}{2}+)+by(\frac{1}{2}-),\end{cases}$$

其特征值为 $\{\tilde{\mu}_j\}_{j=0}^{+\infty}$，并且

1) 若 $\alpha>0$，$f\in R_N^+$，则 $\tilde{\alpha}_0=0$，$\tilde{\mu}_j=\lambda_{j+N+1}$；

2) 若 $\alpha=0$，$f\in R_N^0$，则 $\tilde{\alpha}_0=0$，$\tilde{\mu}_j=\lambda_{j+N}$；

3) 其余情况下，$\tilde{\alpha}_0>0$，$\tilde{\mu}_j=\lambda_{j+N}$。

下面讨论内部点间断且边界条件含谱参数的S-L问题的特征值渐近式。

考虑闭区间[0,1] 上的S-L问题 L'：

$$l'y:=-y''+q(x)y=\lambda'y,\tag{14}$$

赋予边界条件：

$$U'(y):=y'(0)-hy(0)=0,\quad V'(y):=y'(1)-Hy(1)=0\tag{15}$$

和非连续条件 $P(y):=y(\frac{1}{2}-)-y(\frac{1}{2}+)=0$，$Q(y):=y'(\frac{1}{2}-)-y'(\frac{1}{2}+)-by(\frac{1}{2}-)=0$，$\lambda'$ 为谱参数，势函数 $q(x)\in L^2[0,1]$，$h,H,b\in\mathbf{R}$。由于问题 L' 是自伴的，故其特征值为实的、简单的。

令 $y(x)$ 和 $v(x)$ 分别是 $[0,\frac{1}{2}]$ 和 $[\frac{1}{2},1]$ 的连续可微函数，记 $\langle y,v\rangle:=yv'-y'v$。

如果 $y(x)$ 和 $v(x)$ 满足非连续条件4) 和条件5)，则

$$\langle y,v\rangle_{x=\frac{1}{2}+0}=\langle y,v\rangle_{x=\frac{1}{2}-0},\tag{16}$$

即$\langle y,v\rangle$在$[0,1]$上是连续的。若$y(x,\lambda)$和$v(x,\lambda)$分别是方程$ly=\lambda y$和$lv=\mu v$的解，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle y,v\rangle=(\lambda-\mu)yv。\tag{17}$$

令$\tau(x,\lambda')$，$\psi(x,\lambda')$，$C(x,\lambda')$，$S(x,\lambda')$是方程(14)的解，且满足下面的初值条件：

$$\tau(0,\lambda')=1,\quad \psi(1,\lambda')=1,\quad C(0,\lambda')=1,\quad S(0,\lambda')=0,$$
$$\tau'(0,\lambda')=h,\quad \psi'(1,\lambda')=-H,\quad C'(0,\lambda')=0,\quad S'(0,\lambda')=1$$

和非连续条件 4) 和条件 5)，则$U'(\tau)=V'(\psi)=0$。

记$\Delta(\lambda')=\langle\tau(x,\lambda'),\psi(x,\lambda')\rangle$，由式(16)和 Liouville 公式知，$\Delta(\lambda')$与$x$无关。$\Delta(\lambda')$是问题$L'$的特征函数，显然有：

$$\Delta(\lambda')=-V'(\tau)=U'(\psi),\tag{18}$$

问题L'的特征值$\{\lambda'_n\}_{n=0}^{+\infty}$恰是$\Delta(\lambda')$的零点。

令$C_0(x,\lambda')$和$S_0(x,\lambda')$分别是闭区间$[0,1]$上方程(14)的解，且满足下面的初值条件：

$$C(0,\lambda')=1,\quad S(0,\lambda')=0,$$
$$C'(0,\lambda')=0,\quad S'(0,\lambda')=1,$$

则由非连续条件 4) 和条件 5) 可得：

$$\begin{cases}C(x,\lambda')=C_0(x,\lambda'),\\ S(x,\lambda')=S_0(x,\lambda'),\end{cases}\quad x<\frac{1}{2},\tag{19}$$

$$\begin{cases}C(x,\lambda')=A_1C_0(x,\lambda')+B_1S_0(x,\lambda'),\\ S(x,\lambda')=A_2C_0(x,\lambda')+B_2S_0(x,\lambda'),\end{cases}\quad x>\frac{1}{2},\tag{20}$$

其中：

$$\begin{cases}A_1=C_0(\frac{1}{2},\lambda')S'_0(\frac{1}{2},\lambda')-C'_0(\frac{1}{2},\lambda')S_0(\frac{1}{2},\lambda')-bC_0(\frac{1}{2},\lambda')S_0(\frac{1}{2},\lambda'),\\ B_1=bC_0(\frac{1}{2},\lambda'),\\ A_2=bS_0(\frac{1}{2},\lambda'),\\ B_2=C_0(\frac{1}{2},\lambda')S'_0(\frac{1}{2},\lambda')-C'_0(\frac{1}{2},\lambda')S_0(\frac{1}{2},\lambda')+bC_0(\frac{1}{2},\lambda')S_0(\frac{1}{2},\lambda'),\end{cases}\tag{21}$$

令$\lambda'=\rho^2$，$\rho=\sigma+i\zeta$。由连续 S-L 问题可知$C_0(x,\lambda')$满足柯西积分方程：

$$C_0(x,\lambda')=\cos\rho x+\int_0^x\frac{\sin\rho(x-t)}{\rho}q(t)C_0(t,\lambda')\mathrm{d}t,\tag{22}$$

当$|\rho|\to\infty$时，$C_0(x,\lambda')=\cos\rho x+O(\frac{1}{\rho}\exp(|\zeta|x))$。

由式(22)可得：

$$C_0(x,\lambda')=\cos\rho x+\frac{\sin\rho x}{2\rho}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\rho}\int_0^x q(t)\sin\rho(x-2t)\mathrm{d}t+O(\frac{1}{\rho^2}\exp(|\zeta|x)),\tag{23}$$

$$C'_0(x,\lambda')=-\rho\sin\rho x+\frac{\cos\rho x}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\cos\rho(x-2t)\mathrm{d}t+O(\frac{1}{\rho}\exp(|\zeta|x))。\tag{24}$$

类似的，

$$S_0(x,\lambda')=\frac{\sin\rho x}{\rho}-\frac{\cos\rho x}{2\rho^2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2\rho^2}\int_0^x q(t)\cos\rho(x-2t)\mathrm{d}t+O(\frac{1}{\rho^3}\exp(|\zeta|x)),\tag{25}$$

$$S'_0(x,\lambda')=\cos\rho x+\frac{\sin\rho x}{2\rho}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{2\rho}\int_0^x q(t)\sin\rho(x-2t)\mathrm{d}t+O(\frac{1}{\rho^2}\exp(|\zeta|x)),\tag{26}$$

由式(21)和式(23)— 式(26)得：

$$\begin{cases}A_1=1+(b_2\int_0^{\frac{1}{2}}q(t)\mathrm{d}t-\frac{b}{2})\frac{\sin\rho}{\rho}+O(\frac{1}{\rho^2}),\\B_1=\frac{b}{2}(1+\cos\rho)+O(\frac{1}{\rho}),\\A_2=O(\frac{1}{\rho^2}),\\B_2=1+O(\frac{1}{\rho}),\end{cases}$$

由于 $\tau(x,\lambda')=C(x,\lambda')+hS(x,\lambda')$,因此由式(19)— 式(21) 和式(23)— 式(26) 可得:

$$\tau(x,\lambda')=\cos\rho x+(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t)\frac{\sin\rho x}{\rho}+o(\frac{1}{\rho}\exp(|\zeta|x)),x<\frac{1}{2},\tag{27}$$

$$\tau(x,\lambda')=\cos\rho x+(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t+\frac{b}{2})\frac{\sin\rho x}{\rho}-\frac{b}{2}\frac{\sin\rho(1-x)}{\rho}+$$
$$o(\frac{1}{\rho}\exp(|\zeta|x)),x>\frac{1}{2},\tag{28}$$

$$\tau'(x,\lambda')=-\rho\sin\rho x+(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t)\cos\rho x+o(\frac{1}{\rho}\exp(|\zeta|x)),x<\frac{1}{2},\tag{29}$$

$$\tau'(x,\lambda')=-\rho\sin\rho x+(h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t+\frac{b}{2})\cos\rho x-\frac{b}{2}\cos\rho(1-x)+$$
$$o(\frac{1}{\rho}\exp(|\zeta|x)),x>\frac{1}{2},\tag{30}$$

由式(18),式(28)和式(30)可得:

$$\Delta(\lambda')=\rho\sin\rho-\omega_1\cos\rho-\omega_2+o(\exp(|\zeta|)),\tag{31}$$

其中:

$$\omega_1=H+h+\frac{1}{2}\int_0^1 q(t)\mathrm{d}t+\frac{b}{2},\quad \omega_2=-\frac{b}{2}。\tag{32}$$

令 $\lambda_n^0=(\rho_n^0)^2$ 是

$$\Delta^0(\lambda')=\rho\sin\rho\tag{33}$$

的零点,那么

$$\rho_n=n\pi+o(1),n\to\infty,\tag{34}$$

为了得到更精确的渐近式,令式(31)等于零,则

$$\sin\rho_n=O(\frac{1}{n})。\tag{35}$$

由式(33)可知:$\rho_n=n\pi+\varepsilon_n$,其中 $\varepsilon_n\to 0$,由于 $\Delta^0(\lambda_n'^0)=\rho_n^0\sin\rho_n^0=0$,由式(35)可得:

$$\varepsilon_n\cos(n\pi)=O(\frac{1}{n})+O(\varepsilon_n^2)。$$

由式(33)可得:

$$\Delta_1^0(\lambda_n'^0):=(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Delta^0(\lambda'))_{\lambda'=\lambda_n'^0}=\frac{1}{2\cos(n\pi)}=\frac{1}{2}(-1)^n,$$

即 $\varepsilon_n\Delta_1^0(\lambda_n'^0)=O(\frac{1}{n})+O(\varepsilon_n^2)$。

由式(35)可得:

$$\varepsilon_n=O(\frac{1}{n})。\tag{36}$$

令式(35)等于零,则由式(36)可得:

$$\rho_n = n\pi + \frac{\theta_n}{n\pi} + \frac{\kappa_n}{n\pi}, \tag{37}$$

其中：$\kappa_n = o(1)$；$\theta_n = (\omega_1(-1)^n + \omega_2)(2\Delta_1^0(\lambda_n'^0))^{-1}$。$\omega_1$ 和 ω_2 如式(32)所示，因此，

$$\lambda'_n = n^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x + H + h + b - (-1)^n b + o(\frac{1}{n})。$$

若把边界条件(15)换做 $e = y'/y$，则：

$$\lambda'_n = (n+D)^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x - 2[e^*]_0^1 + b - (-1)^n b + o(\frac{1}{n}), \tag{38}$$

其中 D 是狄利克雷条件个数的一半，当 e 是定值时，$e^* = e$，其余情况，$e^* = 0$。

由定理 4 可得，若用 λ_j 替换式(38)中的 λ'_j，则其亦成立。

定理 5　S-L 问题(1)—问题(5)的特征值由如下形式表示：

1)如果 $f \in R_N^0$，则当 $n \to \infty$ 时，

$$\lambda_n = \begin{cases} (n-N)^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x - b - (-1)^n b + 2\cot\alpha + o(\frac{1}{n}), & \alpha \neq 0, \\ (n+1/2-N)^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x - b - (-1)^n b + o(\frac{1}{n}), & \alpha = 0。\end{cases} \tag{39}$$

2)如果 $f \in R_N^+$，则当 $n \to \infty$ 时，

$$\lambda_n = \begin{cases} (n-\frac{1}{2}-N)^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x - b - (-1)^n b + 2\cot\alpha + (\frac{2}{a}) + o(\frac{1}{n}), & \alpha \neq 0, \\ (n-N)^2\pi^2 + \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x - b - (-1)^n b + (\frac{2}{a}) + o(\frac{1}{n}), & \alpha = 0。\end{cases} \tag{40}$$

3　结　论

基于文献[1]中的结论，针对非连续且边界条件含谱参数的 S-L 问题(1)—问题(5)的特征值给出了精细估计，首先利用 Hergloz 函数的转换，建立了边界条件含谱参数的 S-L 问题与常值边界条件 S-L 问题的转换。然后通过直和空间的等价刻画，证明了非连续 S-L 问题的特征值与连续 S-L 问题的特征值间的交替关系，并建立了该问题的振荡理论。最后得到了特征值的渐近表达式。研究结果为该问题的逆问题提供了理论依据。

参考文献/References：

[1]　BENEDEK A I，PANZONE R. On Sturm-Liouville problems with the square root of the eigenvalue parameter conditions contained in the boundary conditions[J]. Notas Algebra Analysis，1981，10：1-62.

[2]　BINDING P A，HRYNIV R，LANGER H，et al. Elliptic eigenvalue problems with eigenparameter dependent boundary conditions[J]. J Differential Equations，2001，174：30-54.

[3]　DIJKSMA A. Eigenfunction expansions for a class of J-selfadjoint ordinary differential operators with boundary conditions containing the eigenvalue parameter[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A，1980，86：1-27.

[4]　EBERHARD W，FREILING G，SCHNEIDER A. Eigenfunction expansion for a regular fourth order eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition[J]. Int J Math Math Sci，1992，15：809-811.

[5]　FULTON C T. Singular eigenvalue problems with eigenvalue-parameter contained in the boundary conditions[J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A，1980，A 87：1-34.

[6]　HINTON D B，SHAW J K. Differential operators with spectral parameter incompletely in the boundary conditions[J]. Funkcial Ekvac，1990，33：363-385.

[7]　RUSSAKOVSKII E M. The matrix Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions[J]. Algebraic and operator aspects，Trans Moscow Math Soc，1996，57：159-184.

[8]　HINTON D B. Eigenfunction expansions for a singular eigenvalue problem with eigenparameter in the boundary conditions[J]. SIAM J Math Anal，1981，12：572-584.

[9] KOZHEVNIKOV A，YAKUBOV S. On operators generated by elliptic boundary problems with a spectral parameter in boundary conditions[J]. Integral Equations Operator Theory，1995，23：205-231.

[10] RUSSAKOVSKII E M. Operator treatment of boundary problems with spectral parameters entering via ploynomials in the boundary conditions[J]. Funct Anal Appl，1975，9：358-359.

[11] SHKALIKOV A A. Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions[J]. J Soviet Math，1986，33：1311-1342.

[12] TRETTER C. On lambda-nonlinear boundary eigenvalue problems[J]. Mathematics Research Akademie，1993，71：1208-1216.

[13] ZAYED E M E，IBRAHIM S F. An expansion theorem for an eigenvalue problem on an arbitrary conditions[J]. Acta Math Sin（Engl Ser），1995，11：399-407.

[14] WEI G，XU H K. Inverse spectral problem with partial information given on the potential and norming constants [J]. Trans Amer Math Soc，2012，364：3265-3288.

[15] PIVOVARCHIK V N. An inverse Sturm-Liouville problem by three spectra[J]. Integral Equ Oper Theory，1999，34：234-243.

[16] GESZTESY F，SIMON B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential. II. The case of discrete sprctrum [J]. Trans Amer Math Soc，2000，35：2765-2787.

[17] 江卫华，郭彦平，王斌.二阶微分方程组边值问题2个正解的存在性[J].河北科技大学学报，2006，27(1)：15-17.
JIANG Weihua，GUO Yanping，WANG Bin. Existence of two positive solutions to boundary value problems of second order systems[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2006，27(1)：15-17.

[18] 郭彦平，苗素荣，禹长龙.无穷区间上二阶三点差分方程边值问题正解的存在性[J].河北科技大学学报，2016，37(6)：556-561.
GUO Yanping，MIAO Surong，YU Changlong. Existence of positive solutions to boundary value problem of second-order three-point difference equations on infinite intervals[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology，2016，37(6)：556-561.

[19] WEI G，XU H K. Inverse spectral problem for a string equation with partial information [J]. Inverse Problems，2010，26：115004.

[20] GESZTESY F，SIMON B. On the determination of a potential from three spectra[J]. Amer Math Soc Transl，1997，2：18-26.

[21] GESZTESY F，SIMON B. Inverse spectral analysis with partial information on the potential，Ⅰ. The case of an a.c. component in the sprctrum[J]. Helv Phys Acta，1997，70：66-71.

[22] BINDING P A，BROWNE P J，WATSON B A. The Sturm-Liouville problem with the discontinuity conditions at an interior point and boundary conditions depending on the eigenparameter[J]. Proc Edinb Math Soc，2002，45：631-645.

[23] 傅守忠，王忠，魏广生. Sturm-Liouville问题及其逆问题[M]. 北京：科学出版社，2015.