第 39 卷第 4 期 河北科技大学学报 Vol.39,No.4
2018 年 8 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Aug. 2018

文章编号:1008-1542(2018)04-0314-07 doi:10.7535/hbkd.2018yx04004

手镯图的 $L(2,1)$—标号

李海萍,杨 英

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要:为了更好地研究频道分配问题,引入了从顶点集到非负整数集的一个函数,即图的一个 $L(2,1)$—标号。假设最小标号为零,图的 $L(2,1)$—标号数就是此图的所有 $L(2,1)$—标号下的跨度的最小数。对于路和圈的 Cartesian 积图的推广图——手镯图的标号数问题,给出了手镯图的定义,即是将拟梯子的两端重合而得到的图形,同时给出了其 $L(2,1)$—标号数的定义,运用顶点分组标号法,根据圈的个数和每个圈的顶点数的不同进行分类讨论,研究结果完全确定了手镯图的 $L(2,1)$—标号数的确切值,丰富了图的种类并完善了标号数理论。

关键词:图论;$L(2,1)$—标号;$L(2,1)$—标号数;拟梯子;手镯图

中图分类号:O157.5 **MSC(2010)主题分类**:05C78 **文献标志码**:A

$L(2,1)$—labeling of the bracelet graph

LI Haiping,YANG Ying

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: In order to better study the channel assignment problem, a function from the vertex set to the set of all nonnegative integers is generated, that is the $L(2,1)$—labeling of a graph. Let the least label be zero, the $L(2,1)$—labeling number of a graph is the smallest number over the spans of all $L(2,1)$—labeling of this graph. Aiming at the problem of the $L(2,1)$—labeling numbers of the bracelet graph, which is a generalized graph from Cartesian products of the path and cycles, the definition of the bracelet graph is given, which is obtained by overlapping the two ends of a similarity ladder. At the same time the definition of the $L(2,1)$—labeling numbers is given. The $L(2,1)$—labeling number is completely determined by vertex grouped labeling method according to the difference of the circles′ numbers and the vertices′ numbers of the circles. The types of graphs are enriched and the labeling number theories are perfected.

Keywords: graph theory; $L(2,1)$—labeling; $L(2,1)$—labeling number; similarity ladder; bracelet graph

图着色是图论研究的主题之一。在无线电通信波段分配的促动下,有了图的距离 2 标号这一迷人的推广概念。Griggs 和 Robert 提出了图的 $L(2,1)$—标号这个概念。$L(2,1)$—标号问题就是将各个频率(非负整数)分配到各个电台,使得“接近”的电台必须接收不同的频率,而“十分接近” 的电台则必须接收至少相差 2 的频率。在图论中具体表述这个问题,简单图 G 的一个 $L(2,1)$—标号就是从顶点集 $V(G)$到非负整数集

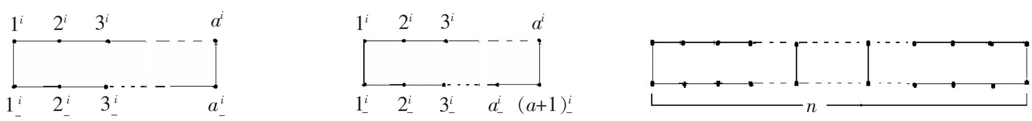
收稿日期:2017-06-20;修回日期:2017-12-12;责任编辑:张 军
基金项目:河北省科技计划项目(154536718)
第一作者简介:李海萍(1975—),女,河北邯郸人,讲师,硕士,主要从事应用数学方面的研究。
E-mail:lishuxue@126.com
李海萍,杨英.手镯图的 $L(2,1)$—标号 [J].河北科技大学学报,2018,39(4):314-320.
LI Haiping,YANG Ying.$L(2,1)$—labeling of the bracelet graph[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2018,39(4):314-320.

的一个函数 f，使得 $d(u,v)=1$ 时，有 $|f(u)-f(v)|\geqslant 2$；当 $d(u,v)=2$ 时，有 $|f(u)-f(v)|\geqslant 1$，其中 u，v 是图 G 的顶点。不妨设最小标号为 0。那么，图 G 的 $L(2,1)$—标号数 $\lambda(G)$ 是 G 的所有 $L(2,1)$—标号下的跨度 $\max\{f(v);v\in V(G)\}$ 的最小数。$L(2,1)$—标号问题就是要找出图 G 的 $L(2,1)$—标号数 $\lambda(G)$。

$L(2,1)$—标号问题得到了广泛研究，已经得到很多图形的 $L(2,1)$—标号结果[1-6]，特别是关于路和圈的 Cartesian 积图的 $L(2,1)$—标号数已基本全部确定[1-2]。后来，在许多论文中 $L(2,1)$—标号的推广概念—— $L(j,k)$—标号得到了进一步探讨[7-9]。文献[9—15]对图的边路替换图的 $L(d,1)$—标号数进行了研究。对于 $L(h,k)$—标号，已有大量的图类——弦图、直径 2 的图、Cartesian 积图、Möbius 梯子等[7,16-18]，均被研究过或确定了 $\lambda_{h,k}$—数再或确定了 $\lambda_{h,k}$—数的界，当然也有许多待解决的问题。文献[19]已研究了路和路的 Cartesian 积图的推广图拟梯子的 $L(2,1)$—标号问题，文献[20]研究了边路替换图的 $L(2,1)$—标号问题。本文主要研究路 P_2 和圈 C_n 的 Cartesian 积图的推广图——手镯图的 $L(2,1)$—标号问题，并完全确定了手镯图 $t\geqslant 5$ 时的 $L(2,1)$—标号数。

1　手镯图的定义

首先设 t 圈 $C_t^i=1^i 2^i 3^i\cdots a^i a_-^i\cdots 3_-^i\ 2_-^i\ 1_-^i\ 1^i$，$(t=2a)$ 或 $C_t^i=1^i 2^i 3^i\cdots a^i\ (a+1)_-^i\ a_-^i\cdots 3_-^i\ 2_-^i\ 1_-^i\ 1^i$，$(t=2a+1)$，为了表述方便，将 t 圈 C_t^i 的顶点分成顶点个数相同或相差一个顶点的上下 2 行，如图 1 所示，即：当 $t=2a$ 时，第 1 行顶点从左向右依次为 $1^i,2^i,3^i,\cdots,a^i$，第 2 行顶点从左向右依次为 $1_-^i,2_-^i,3_-^i,\cdots,a_-^i$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$。当 $t=2a+1$ 时，第 1 行顶点从左向右依次为 $1^i,2^i,3^i,\cdots,a^i$，第 2 行顶点从左向右依次为 $1_-^i,2_-^i,3_-^i,\cdots,a_-^i,(a+1)_-^i$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$。



a) $t=2a$　　b) $t=2a+1$　　c) $P(t,n)$

图 1　圈 C_t^i 和 $P(t,n)$

Fig.1　Cycles C_t^i and $P(t,n)$

定义 1　将 n 个相同的 t 圈 C_t^i，$(i=0,1,\cdots,n-1)$ 如下依次相接：当 $t=2a$ 时，对 $i=0,1,\cdots,n-2$，把点 a^i 和 1^{i+1} 重合，把点 a_-^i 和 1_-^{i+1} 重合，边 $a^i a_-^i$ 和边 $1^{i+1}1_-^{i+1}$ 重合；当 $t=2a+1$ 时，对 $i=0,1,\cdots,n-2$，把点 a^i 和 1^{i+1} 重合，把点 $(a+1)_-^i$ 和 1_-^{i+1} 重合，边 $a^i(a+1)_-^i$ 和边 $1^{i+1}1_-^{i+1}$ 重合，所得的图称为拟梯子，用 $P(t,n)$ 表示，如图 1 所示。

定义 2　在拟梯子的基础上把拟梯子的两端如下重合：当 $t=2a$ 时，将 1^0 和 a^{n-1} 重合，1_-^0 和 a_-^{n-1} 重合，边 $a^{n-1}a_-^{n-1}$ 和边 $1^0 1_-^0$ 重合；当 $t=2a+1$ 时，将 1^0 和 a^{n-1} 重合，1_-^0 和 $(a+1)_-^{n-1}$ 重合，边 $a^{n-1}(a+1)_-^{n-1}$ 和边 $1^0 1_-^0$ 重合，所得的图称为手镯图，用 $C(t,n)$ 来表示。易见，$t=4$ 的手镯图即路 P_2 和圈 C_n 的 Cartesian 积图 $P_2\square C_n$。下面给出需要的几个引理。

引理 1[6]　设 G 是最大度为 $\Delta\geqslant 2$ 的图，则 $\lambda(G)\geqslant\Delta+1$；且若 G 包含 3 个度为 Δ 的顶点，且其中的 1 个顶点与另外 2 个相邻，则 $\lambda(G)\geqslant\Delta+2$。

引理 2[1]　若 $G\subseteq H$，则有 $\lambda(G)\leqslant\lambda(H)$。

2　手镯图的 $L(2,1)$—标号

由于 $P(t,n)\subseteq C(t,n)$，从而由引理 2 得到 $\lambda(C(t,n))$ 的一个下界，即 $\lambda(P(t,n))\leqslant\lambda(C(t,n))$。下面对任意的 $t\geqslant 3$ 值给出 $\lambda(C(t,n))$ 的确切值。

由于 $t=3$ 的手镯图即轮 W_n，$t=4$ 的手镯图即路 P_2 和圈 C_n 的 Cartesian 积图 $P_2\square C_n$，W_n 和 $P_2\square C_n$ 的 $L(2,1)$—标号数结论已有，即如下定理。

定理 1[8]　$\lambda(W_3)=\lambda(W_4)=6$；当 $n\geqslant 5$ 时，$\lambda(W_n)=n+1$。

定理 2[16]　$\lambda(P_2\square C_n)=\begin{cases}5, & 若\ n\equiv 0(\bmod 3),\\ 0, & 其他。\end{cases}$

下面对 $t\geqslant 5$ 的手镯图的 $L(2,1)$—标号进行研究。

定理 3　设 $k\geqslant 3$，当 $n=3k$，$3k+2$ 且 $n\neq 5$ 时，$\lambda(C(5,n))=5$；当 $n=5$ 或 $n=3k+1$ 时，$\lambda(C(5,n))=6$。

证明　首先，因为 $\lambda(P(5,n))=5$[19]，由引理 2 可知，$\lambda(C(5,n))\geqslant 5$。

当 $n=3k$ 时，不难发现，文献[19]中 $t=5$ 拟梯子跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号同样可作为手镯图的 $L(2,1)$—标号。所以，当 $n=3k$ 时，$\lambda(C(5,n))\leqslant 5$。$\lambda(C(5,n))=5$。当 $n=3k+2$ 且 $n\neq 5$ 时，可以给出跨度为 5 的 $t=5$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\left(\begin{matrix}\underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} & \cdots & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1}\\ \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4} & & \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4}\end{matrix}\right)$$

$n=3k$

$$\left(\begin{matrix}\underline{0} & & \underline{4} & & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} & & \underline{4} & & \underline{2} & & \underline{0} & & \underline{4} & & \underline{2} & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & & \underline{4} & & \underline{2} & & \underline{0}\\ \underline{3} & 5 & \underline{2} & 0 & \underline{5} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{3} & 5 & \underline{0} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3}\end{matrix}\right)$$

$n=3k+2$ 且 $n\neq 5$

$t=5$ 的手镯图跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

综上可知：当 $n=3k$，$3k+2$ 且 $n\neq 5$ 时，$\lambda(C(5,n))=5$。

当 $n=5$ 时，给出跨度为 6 的 $t=5$ 的手镯图的 $L(2,1)$—标号：

$$\left(\begin{matrix}\underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{2} & & \underline{6} & & \underline{1}\\ \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{1} & 6 & \underline{4} & 1 & \underline{3} & 0 & \underline{4}\end{matrix}\right)$$

$n=5$

$t=5$ 的手镯图跨度为 6 的 $L(2,1)$—标号

所以 $\lambda(C(5,n))\leqslant 6$。又假设标号数为 5，则对任一标号数 $i=0,1,2,3,4,5$，至多可标 3 个顶点。用 l_i 表示标 i 的顶点个数，则 $l_0,l_1,l_2,l_3,l_4,l_5\leqslant 3$，且其中至多 3 个为 3，要么 $l_0=l_2=l_4=3$，要么 $l_1=l_3=l_5=3$，若如此的话，则无法给出其余点的标号。若 l_0,l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 中至多 2 个为 3，则 $l_0+l_2+l_4+l_1+l_3+l_5\leqslant 3+3+2+2+2+2=14$，这与图的顶点数 15 矛盾，从而 $t=5$ 且 $n=5$ 的手镯图标号数至少为 6。

当 $n=3k+1$ 时，可以给出跨度为 6 的 $t=5$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\left(\begin{matrix}\underline{1} & & \underline{3} & & \underline{0} & & \underline{5} & & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} & \cdots & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1}\\ \underline{4} & 6 & \underline{5} & 2 & \underline{4} & 1 & \underline{3} & 0 & \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4} & & \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4}\end{matrix}\right)$$

$n=3k+1$

$t=5$ 的手镯图跨度为 6 的 $L(2,1)$—标号

所以 $\lambda(C(5,n))\leqslant 6$。假设标号数为 5，则 $t=5$ 的手镯图中圈 $C_n=1^{0}_{-}2^{0}_{-}3^{0}_{-}\cdots(n+1)^{0}_{-}1^{0}_{-}$ 的任一子图的标号可能为如下情形及它们的对称情形（这里的对称指的是 a 与 $5-a$ 对称）或如下情形拼接，即 0，1，2，3，4，5 所有可能的路的 $L(2,1)$—标号：02402，02403，02405，02413，02415，02502，02503，02504，02513，02514，025302，025304，025305，025314，025315；0314，0315，03502，03503，03504，03513，03514，035203，035204，035205，0352402，0352403，0352405，0352413，0352415；0413，0415，04203，04204，04205，042502，042503，042504，042513，042514，0425302，0425304，0425305，0425314，0425315；0513，0514，05203，05204，05205，052402，052403，052405，052413，052415，05302，05304，05305，05314，05315；1302，1304，1305，13502，13503，13504，13513，13514，135203，135204，135205，1352402，1352403，1352405，1352413，1352415；1402，1403，1405，14203，14204，14205，142502，142503，142504，142513，142514，1425302，1425304，1425305，1425314， 1425315；1502，1503，1504，15203，15204，15205，152402，152403，152405，152413，152415，15302，15304，15305，15314，15315；2402，2403，2405，2413，2415；2502，2503，2504，2513，2514，25302，25304，25305，25314，25315；3502，3503，3504，3513，3514，35203，35204，35205，352402，352403，352405，352413，352415。

以以上标号段为中心，对 $t=5$ 的手镯图进一步标号，其中只有如下的 18 个可作为圈 $C_n=1^0_-2^0_-3^0_-\cdots(n+1)^0_-1^0_-$ 的子图的标号：02402，02503；03513，03514；0413，04204；05204，05305，05315；13513，13514；14204；15314，15315；2402；25314，25315，3513。其余的情形都在某点处无法取得标号，不难发现，每段标号末尾 2 个数是另一段的开始 2 个数。而这些可作为 $C_n=1^0_-2^0_-3^0_-\cdots(n+1)^0_-1^0_-$ 的子图的标号段，除了 0413，2402，3513 这 3 个长为 4，其余长均为 5。又因为 2402 后只和 02402 衔接，3513 后只和 13513 衔接，如此循环下去，可得的循环标号分别为 240240…240 和 351351…351，易见 $C_n=1^0_-2^0_-3^0_-\cdots(n+1)^0_-1^0_-$ 含 2402 和 3513 的标号段的标号，对应于圈长为 $n=3k$ 的圈标号；且 $C_n=1^0_-2^0_-3^0_-\cdots(n+1)^0_-1^0_-$ 含 0413 的标号必为 04135142042042…042，易见对应于圈长为 $n=3k+2$ 的圈标号。而长为 5 的标号段可构成的标号只能对应于圈长为 $n=3k$ 的圈标号。从而当 $n=3k+1$ 时，用 0，1，2，3，4，5 给不出 $t=5$ 的手镯图的标号，从而该图的标号数至少为 6。综上可知：当 $n=5$ 或 $n=3k+1$ 时，$\lambda(C(5,n))=6$。

定理 4　当 $n\neq5$ 时，$\lambda(C(6,n))=5$；当 $n=5$ 时，$\lambda(C(6,5))=6$。

证明　首先，因为 $\lambda(P(6,n))=5$[19]，由引理 2 可知，$\lambda(C(6,n))\geqslant5$。其次，可以给出跨度为 5 的 $t=6$ 且 $n\neq5$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\begin{pmatrix}\underline{0}&2&\underline{5}&3&\underline{0}\\ \underline{5}&3&\underline{0}&2&\underline{5}\end{pmatrix}$$

$C(6,2)$的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

$$\begin{pmatrix}\underline{0}&2&\underline{4}&0&\underline{2}&4&\underline{0}&\cdots&\underline{0}&2&\underline{4}&0&\underline{2}&4&\underline{0}\\ \underline{3}&5&\underline{1}&3&\underline{5}&1&\underline{3}&&\underline{3}&5&\underline{1}&3&\underline{5}&1&\underline{3}\end{pmatrix}$$

$n=3k$

$$\begin{pmatrix}\underline{0}&5&\underline{3}&1&\underline{5}&0&\underline{2}&4&\underline{0}&2&\underline{4}&0&\underline{2}&4&\cdots&\underline{0}&2&\underline{4}&0&\underline{2}&4&\underline{0}\\ \underline{3}&5&\underline{0}&4&\underline{2}&0&\underline{5}&1&\underline{3}&5&\underline{1}&3&\underline{5}&1&&\underline{3}&5&\underline{1}&3&\underline{5}&1&\underline{3}\end{pmatrix}$$

$n=3k+1$

$$\begin{pmatrix}\underline{0}&5&\underline{3}&1&\underline{5}&0&\underline{2}&4&\underline{0}&5&\underline{3}&1&\underline{5}&0&\underline{2}&4&\underline{0}&2&\underline{4}&0&\underline{2}&4&\underline{0}&\cdots&\underline{0}&2&\underline{4}&0&\underline{2}&4&\underline{0}\\ \underline{3}&5&\underline{0}&4&\underline{2}&0&\underline{5}&1&\underline{3}&5&\underline{0}&4&\underline{2}&0&\underline{5}&1&\underline{3}&5&\underline{1}&3&\underline{5}&1&\underline{3}&&\underline{3}&5&\underline{1}&3&\underline{5}&1&\underline{3}\end{pmatrix}$$

$n=3k+2$ 且 $n\neq5$

$t=6$ 的手镯图跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

所以 $\lambda(C(6,n))\leqslant5$。综上可知：当 $n\neq5$ 时，$\lambda(C(6,n))=5$。

对 $t=6$ 且 $n=5$ 的手镯图，若标号数为 5，则对任一标号数 $i=0,1,2,3,4,5$，至多可标 4 个顶点，用 l_i 表示标 i 的顶点个数，且设 l_0,l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 从大到小排为 a,b,c,d,e,f，则至多如下情形之一：

1）$a=b=c=d=4$，且 $e<2,f<2$；

2）$a=b=c=4$，且 $d<4,e<3,f<3$；

3）$a=b=4$，且 $c<4,d<4,e<4,f<3$；

4）$a=4$，且 $b<4,c<4,d<4,e<4,f<4$；

5）$a<4,b<4,c<4,d<4,e<4,f<4$。

易见，$a+b+c+d+e+f<20$，这与图的顶点数 20 矛盾，从而 $t=6$ 且 $n=5$ 的手镯图标号数至少为 6。其次，可以给出跨度为 6 的 $t=6$ 且 $n=5$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\begin{pmatrix}\underline{4}&2&\underline{5}&3&\underline{0}&2&\underline{5}&3&\underline{1}&6&\underline{4}\\ \underline{1}&6&\underline{0}&2&\underline{5}&3&\underline{0}&2&\underline{5}&3&\underline{1}\end{pmatrix}$$

$t=6$ 且 $n=5$ 的手镯图跨度为 6 的 $L(2,1)$—标号

所以 $t=6$，且 $n=5$ 的手镯图标号数为 6。综上可知：当 $n\neq 5$ 时，$\lambda(C(6,n))=5$；当 $n=5$ 时，$\lambda(C(6,5))=6$。

定理 5 $\lambda(C(7,n))=5$。

证明 首先，因为 $\lambda(P(6,n))=5$[19]，由引理 2 可知，$\lambda(C(7,n))\geqslant 5$。其次，可以给出跨度为 5 的 $t=7$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc} \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} \end{array}\right)$$

$$n=2k$$

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc} \underline{0} & 4 & & \underline{1} & 3 & & \underline{5} & 2 & & \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 3 & 0 & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 5 & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} \end{array}\right)$$

$$n=2k+1$$

$t=7$ 的手镯图跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

所以 $\lambda(C(7,n)\leqslant 5$。综上可知：$\lambda(C(7,n))=5$。

定理 6 当 $t=8,9,10,11$ 时，$\lambda(C(t,n))=5$。

证明 首先，因为当 $t=8,9,10,11$ 时，$\lambda(P(t,n))=5$[19]，由引理 2 可知，$\lambda(C(t,n))\geqslant 5$。其次，给出跨度为 5 的 $t=8,9,10,11$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} \underline{0} & 2 & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & \underline{0} \\ \underline{5} & 3 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 3 & 1 & \underline{5} \end{array}\right)$$

$t=8$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc} \underline{0} & 2 & & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & & 4 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & 1 & \underline{5} \end{array}\right)$$

$t=9$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc} \underline{0} & 2 & 5 & 3 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 5 & 3 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 0 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 0 & 3 & \underline{5} \end{array}\right)$$

$t=10$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc} \underline{0} & 4 & 1 & 2 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 4 & 1 & 2 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} \end{array}\right)$$

$t=11$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

所以 $\lambda(C(t,n))\leqslant 5$。综上可知：当 $t=8,9,10,11$ 时，$\lambda(C(t,n))=5$。

定理 7 $\lambda(C(12,n))=4$。

证明 首先，由引理 1 可知，$\lambda(C(12,n))\geqslant 4$[19]。其次，可以给出跨度为 4 的 $t=12$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc} \underline{0} & 3 & 1 & 4 & 2 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 3 & 1 & 4 & 2 & \underline{0} \\ \underline{4} & 1 & 3 & 0 & 2 & \underline{4} & & \underline{4} & 1 & 3 & 0 & 2 & \underline{4} \end{array}\right)$$

$t=12$ 的手镯图跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

所以 $\lambda(C(12,n))\leqslant 4$。综上可知：$\lambda(C(12,n))=4$。

定理 8 $\lambda(C(13,n))=5$。

证明 首先，因为 $\lambda(P(13,n))=5$[19]，由引理 2 可知，$\lambda(C(13,n))\geqslant 5$。其次，可以给出跨度为 5 的 $t=13$ 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc} \underline{0} & 2 & 4 & 1 & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 1 & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} \end{array}\right)$$

$t=13$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

所以 $\lambda(C(13,n))\leqslant 5$。综上可知：$\lambda(C(13,n))=5$。

定理 9　当 $t=14,15,16,17$，$n=2k$ 时，$\lambda(C(t,2k))=4$；当 $n=2k+1$ 时，$\lambda(C(t,2k+1))=5$。

证明　首先，因为当 $t=14,15,16,17$ 时，$\lambda(P(t,n))=4$[19]，由引理 2 可知，$\lambda(C(t,2k))\geqslant 4$。对 $n=2k$，不难发现，文献[19]中 $t=14,15,16,17$ 的跨度为 4 的拟梯子标号同样可作为手镯图的 $L(2,1)$—标号。所以 $\lambda(C(t,2k))\leqslant 4$。综上可知：当 $t=14,15,16,17$，$n=2k$ 时，$\lambda(C(t,2k))=4$。

当 $n=2k+1$ 时，若标号数为 4，则至少一个圈的上下两行的首末标号各自相同。即 1 与 a 的标号同为 0(4)，下行的首末标号同为 4(0)，这样的话，该圈不能被标号。所以当 $t=14,15,16,17$ 时，$\lambda(C(t,2k+1))>4$。其次，对 $n=2k+1$，可以给出跨度为 5 的手镯图 $L(2,1)$—标号：

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 5 & 0 & 2 & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 5 & 0 & 2 & 4 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=14$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=15$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=16$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=17$ 的手镯图的跨度为 5 的 $L(2,1)$—标号

所以，$\lambda(C(t,2k+1))\leqslant 5$。综上可知：当 $t=14,15,16,17$，$n=2k+1$ 时，$\lambda(C(t,2k+1))=5$。

定理 10　当 $t\geqslant 18$ 时，$\lambda(C(t,n))=4$。

证明　首先，当 $t\geqslant 18$ 时，$\lambda(P(t,n))=4$[19]，由引理 2 可知，$\lambda(C(t,n))\geqslant 4$；其次不难发现，文献[19]中 $t\geqslant 18$ 的跨度为 4 的拟梯子标号同样可作为 $t\geqslant 18$ 的手镯图的 $L(2,1)$—标号。综上可知：当 $t\geqslant 18$ 时，$\lambda(C(t,n))=4$。

3　结　论

本文首先给出了路 P_2 和圈 C_n 的 Cartesian 积图的推广图——手镯图的定义，然后完全确定了对任意 $t\geqslant 3$ 时手镯图的 $L(2,1)$—标号数。总结如下：

$$\lambda(C(t,n))=\begin{cases} \begin{cases}\lambda(W_3)=\lambda(W_4)=6, & n=3,4,\\ \lambda(W_n)=n+1, & n\geqslant 5,\end{cases} & t=3,\\ \lambda(P_2\square C_n)=\begin{cases}5, & \text{若 } n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 3),\\ 6, & \text{其他},\end{cases} & t=4,\\ \begin{cases}5, & n=3k,3k+2 \text{ 且 } n\neq 5,\\ 6, & n=5 \text{ 或 } n=3k+1,\end{cases}\quad k\geqslant 3 & t=5,\\ \begin{cases}5, & n\neq 5,\\ 6, & n=5,\end{cases} & t=6,\\ 5, & t=7,8,9,10,11,13,\\ 4, & t=12,18,19,\cdots,\\ \begin{cases}4, & n=2k,\\ 5, & n=2k+1,\end{cases} & t=14,15,16,17。\end{cases}$$

研究结果丰富了图的种类并完善了标号数理论，为实际应用——频道分配问题的研究提供了理论基础。

参考文献/References：

[1] CHANG G J, KUO D. The $L(2,1)$—labeling problem on graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics,1993, 15(2): 309-316.

[2] GEORGES J P, MAURO D W. Generalized vertex labelings with a condition at distance two[J]. Congr Numerantium, 1995, 109: 141-159.

[3] GEORGES J P, MAURO D W. Some results on $\lambda_{j,k}$-numbers of the products of complete graphs[J]. Congr Numerantium, 1999, 140: 141-160.

[4] GEORGES J P, MAURO D W, STEIN M I. Labeling products of complete graphs with a condition at distance two[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2001, 14(1): 28-35.

[5] GEORGES J P, MAURO D W, WHITTLESEY M A. Relating path coverings to vertex labelings with a condition at distance two[J]. Discrete Mathematics, 1994, 135(1/2/3): 103-111.

[6] GRIGGS J R, YEH R K. Labeling graphs with a condition at distance 2[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2006, 5(4) : 586-595.

[7] JHA P K, NARAYANAN A, SOOD P, et al. On $L(2,1)$—labeling of the Cartesian product of a cycle and a path[J]. Ars Combinatoria, 2000, 55: 81-89.

[8] YEH R K. A survey on labeling graphs with a condition at distance two[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(12): 1217-1231.

[9] BORODIN O V, KOSTOCHKA A V, WOODALL D R. Total colorings of planar graphs with large maximum degree[J]. Journal of Graph Theory, 1997, 26(1): 53-59.

[10] BORODIN O V, KOSTOCHKA A V, WOODALL D R. List edge and list total colourings of multigraphs[J]. Journal of Combinational Theory Ser B, 1997, 71(2): 184-204.

[11] BORODIN O V, KOSTOCHKA A V, WOODALL D R. Total colorings of planar graphs with large girth[J]. Europe Journal Combination, 1998, 19(1): 19-24.

[12] ISOBE S, ZHOU X, NISHIZEKI T. Total colorings of degenerated graphs[J]. Combinatorica, 2001, 100(2): 506-517.

[13] ROSENFELD M. On the total coloring of certain graphs[J]. Israel Journal of Mathematics, 1971, 9(3): 396-402.

[14] VIJAVYADITYA N. On total chromatic number of a graph[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1971, 2/3(3): 405-408.

[15] LYU Damei, LIN Nianfeng. $L(d,1)$—labelings of edge-path-replacement of a graph[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2013, 26(4): 819-831.

[16] KUO D, YAN J H. On $L(2,1)$—labeling of cartesian products of paths and cycles[J]. Discrete Mathematics, 2004, 283(1): 137-144.

[17] WHITTLESEY M A, GEORGES J P, MAURO D W. On the -number of Q_n and related graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1995, 8(4): 499-506.

[18] LYU Damei, LIN Nianfeng, YAN Dongmei. $L(d,1)$—labelings of the möbius ladders[J]. Journal of Zhejiang University(Science Edition), 2011, 38(3):256-261.

[19] 杜鹃,吕大梅,李冬冬,等.拟梯子的 $L(2,1)$—标号[J].辽宁大学学报(自然科学版),2013,40(4):308-313
DU Juan, LYU Damei, LI Dongdong, et al. The $L(2,1)$—labelings of the similarity ladders[J]. Journal of Liaoning University(Natural Sciences Edition), 2013, 40(4):308-313.

[20] LYU Damei, SUN Jianping. $L(2,1)$—labelings of the edge-multiplicity-paths-replacement of a graph[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016, 31(1):396-404.