39 4 Vol.39,No.4
2018 8 Journal of Hebei University of Science and Technology Aug. 2018

文章编号:1008-1542(2018)04-0314-07 doi:10.7535/hbkd.2018yx04004

$L(2,1)$—

李海萍,杨 英

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要:为了更好地研究频道分配问题,引入了从顶点集到非负整数集的一个函数,即图的一个$L(2,1)$—标号。假设最小标号为零,图的$L(2,1)$—标号数就是此图的所有$L(2,1)$—标号下的跨度的最小数。对于路和圈的Cartesian积图的推广图——手镯图的标号数问题,给出了手镯图的定义,即是将拟梯子的两端重合而得到的图形,同时给出了其$L(2,1)$—标号数的定义,运用顶点分组标号法,根据圈的个数和每个圈的顶点数的不同进行分类讨论,研究结果完全确定了手镯图的$L(2,1)$—标号数的确切值,丰富了图的种类并完善了标号数理论。

关键词:图论;$L(2,1)$-标号;$L(2,1)$-标号数;拟梯子;手镯图

中图分类号:O157.5 **MSC(2010)主题分类**:05C78 **文献标志码**:A

$L(2,1)$—labeling of the bracelet graph

LI Haiping, YANG Ying

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: In order to better study the channel assignment problem, a function from the vertex set to the set of all nonnegative integers is generated, that is the $L(2,1)$—labeling of a graph. Let the least label be zero, the $L(2,1)$—labeling number of a graph is the smallest number over the spans of all $L(2,1)$—labeling of this graph. Aiming at the problem of the $L(2,1)$—labeling numbers of the bracelet graph, which is a generalized graph from Cartesian products of the path and cycles, the definition of the bracelet graph is given, which is obtained by overlapping the two ends of a similarity ladder. At the same time the definition of the $L(2,1)$—labeling numbers is given. The $L(2,1)$—labeling number is completely determined by vertex grouped labeling method according to the difference of the circles' numbers and the vertices' numbers of the circles. The types of graphs are enriched and the labeling number theories are perfected.

Keywords: graph theory; $L(2,1)$—labeling; $L(2,1)$—labeling number; similarity ladder; bracelet graph

。 , 2
。Griggs Robert $L(2,1)$— 。$L(2,1)$— (
) , " " , " "
2 。 , G $L(2,1)$— $V(G)$

:2017-06-20; :2017-12-12; :
: (154536718)

: (1975—), , , , , 。
E-mail:lishuxue@126.com

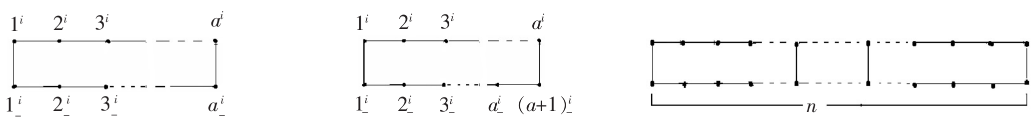
, . $L(2,1)$— [J]. ,2018,39(4):314-320.

LI Haiping, YANG Ying. $L(2,1)$—labeling of the bracelet graph[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2018, 39(4): 314-320.

f， $d(u,v)=1$ ， $|f(u)-f(v)|\geqslant 2$； $d(u,v)=2$ ， $|f(u)-f(v)|\geqslant 1$， u，v G 。 0。 ， G $L(2,1)$— $\lambda(G)$ G $L(2,1)$— $\max\{f(v);v\in V(G)\}$ 。$L(2,1)$— G $L(2,1)$— $\lambda(G)$。 $L(2,1)$— ， $L(2,1)$— [1-6]， Cartesian $L(2,1)$— [1-2]。 ， $L(2,1)$— —— $L(j,k)$— [7-9]。 [9—15] $L(d,1)$— 。 $L(h,k)$— ， —— 、 2 、Cartesian 、Möbius [7,16-18]， $\lambda_{h,k}$— $\lambda_{h,k}$— ， 。 [19] Cartesian $L(2,1)$— ， [20] $L(2,1)$— 。 P_2 C_n Cartesian —— $L(2,1)$— ， $t\geqslant 5$ $L(2,1)$— 。

1 手镯图的定义

t $C_t^i=1^i2^i3^i\cdots a^ia_-^i\cdots 3_-^i2_-^i1_-^i1^i$，$(t=2a)$ $C_t^i=1^i2^i3^i\cdots a^i(a+1)_-^ia_-^i\cdots 3_-^i2_-^i1_-^i1^i$，$(t=2a+1)$， ， t C_t^i 2 ， 1 ， ： $t=2a$ ， 1 $1^i,2^i,3^i,\cdots,a^i$， 2 $1_-^i,2_-^i,3_-^i,\cdots,a_-^i$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$。 $t=2a+1$ ， 1 $1^i,2^i,3^i,\cdots,a^i$， 2 $1_-^i,2_-^i,3_-^i,\cdots,a_-^i,(a+1)_-^i$，$(i=0,1,\cdots,n-1)$。



a) $t=2a$　　b) $t=2a+1$　　c) $P(t,n)$

图 1 圈 C_t^i 和 $P(t,n)$

Fig.1 Cycles C_t^i and $P(t,n)$

定义 1 n t C_t^i，$(i=0,1,\cdots,n-1)$ ： $t=2a$ ， $i=0,1,\cdots,n-2$， a^i 1^{i+1} ， a_-^i 1_-^{i+1} ， $a^ia_-^i$ $1^{i+1}1_-^{i+1}$ ； $t=2a+1$ ， $i=0,1,\cdots,n-2$， a^i 1^{i+1} ， $(a+1)_-^i$ 1_-^{i+1} ， $a^i(a+1)_-^i$ $1^{i+1}1_-^{i+1}$ ， ， $P(t,n)$ ， 1 。

定义 2 ： $t=2a$ ， 1^0 a^{n-1} ，1_-^0 a_-^{n-1} ， $a^{n-1}a_-^{n-1}$ $1^01_-^0$ ； $t=2a+1$ ， 1^0 a^{n-1} ，1_-^0 $(a+1)_-^{n-1}$ ， $a^{n-1}(a+1)_-^{n-1}$ $1^01_-^0$ ， ， $C(t,n)$ 。 ，$t=4$ P_2 C_n Cartesian $P_2\square C_n$。 。

引理 1[6] G $\Delta\geqslant 2$ ， $\lambda(G)\geqslant\Delta+1$； G 3 Δ ， 1 2 ， $\lambda(G)\geqslant\Delta+2$。

引理 2[1] $G\subseteq H$， $\lambda(G)\leqslant\lambda(H)$。

2 手镯图的 $L(2,1)$—标号

$P(t,n)\subseteq C(t,n)$， 2 $\lambda(C(t,n))$ ， $\lambda(P(t,n))\leqslant\lambda(C(t,n))$。

$t\geqslant 3$ $\lambda(C(t,n))$ 。

$t=3$ W_n，$t=4$ P_2 C_n Cartesian $P_2\square C_n$，W_n $P_2\square C_n$ $L(2,1)$— ， 。

定理 1[8] $\lambda(W_3)=\lambda(W_4)=6$； $n\geqslant 5$ ，$\lambda(W_n)=n+1$。

定理 2[16] $\lambda(P_2\square C_n)=\begin{cases}5, & n\equiv 0\pmod 3,\\ 0, & \end{cases}$ 。

$t\geqslant 5$ $L(2,1)$— 。

定理 3 $k\geqslant 3$， $n=3k,3k+2$ $n\neq 5$ ，$\lambda(C(5,n))=5$； $n=5$ $n=3k+1$ ，$\lambda(C(5,n))=6$。

证明 ， $\lambda(P(5,n))=5$[19]， 2 ，$\lambda(C(5,n))\geqslant 5$。

$n=3k$ ， ， [19] $t=5$ 5 $L(2,1)$— $L(2,1)$— 。 ， $n=3k$ ，$\lambda(C(5,n))\leqslant 5$。$\lambda(C(5,n))=5$。 $n=3k+2$ $n\neq 5$ ， 5 $t=5$ $L(2,1)$— ：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc} \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} & \cdots & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} \\ \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4} & & \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4} \end{array}\right)$$

$n=3k$

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccccccccc} \underline{0} & & \underline{4} & & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} & & \underline{4} & & \underline{2} & & \underline{0} & & \underline{4} & & \underline{2} & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & & \underline{4} & & \underline{2} & & \underline{0} \\ \underline{3} & 5 & \underline{2} & 0 & \underline{5} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{3} & 5 & \underline{0} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3} \end{array}\right)$$

$n=3k+2$ $n\neq 5$

$t=5$ 5 $L(2,1)$—

： $n=3k,3k+2$ $n\neq 5$ ，$\lambda(C(5,n))=5$。

$n=5$ ， 6 $t=5$ $L(2,1)$— ：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccc} \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{2} & & \underline{6} & & \underline{1} \\ \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{1} & 6 & \underline{4} & 1 & \underline{3} & 0 & \underline{4} \end{array}\right)$$

$n=5$

$t=5$ 6 $L(2,1)$—

$\lambda(C(5,n))\leqslant 6$。 5， $i=0,1,2,3,4,5$， 3 。 l_i i ， $l_0,l_1,l_2,l_3,l_4,l_5\leqslant 3$， 3 3， $l_0=l_2=l_4=3$， $l_1=l_3=l_5=3$， ， 。 l_0,l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 2 3， $l_0+l_2+l_4+l_1+l_3+l_5\leqslant 3+3+2+2+2+2=14$， 15 ， $t=5$ $n=5$ 6。

$n=3k+1$ ， 6 $t=5$ $L(2,1)$— ：

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc} \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{0} & & \underline{5} & & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} & \cdots & \underline{1} & & \underline{3} & & \underline{5} & & \underline{1} \\ \underline{4} & 6 & \underline{5} & 2 & \underline{4} & 1 & \underline{3} & 0 & \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4} & & \underline{4} & 2 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{4} \end{array}\right)$$

$n=3k+1$

$t=5$ 6 $L(2,1)$—

$\lambda(C(5,n))\leqslant 6$。 5， $t=5$ $C_n=1^{0}_{-}2^{0}_{-}3^{0}_{-}\cdots(n+1)^{0}_{-}1^{0}_{-}$ （ a $5-a$ ） ， 0,1,2,3,4,5 $L(2,1)$— ：02402，02403，02405，02413，02415，02502，02503，02504，02513，02514，025302，025304，025305，025314，025315；0314，0315，03502，03503，03504，03513，03514，035203，035204，035205，0352402，0352403，0352405，0352413，0352415；0413，0415，04203，04204，04205，042502，042503，042504，042513，042514，0425302，0425304，0425305，0425314，0425315；0513，0514，05203，05204，05205，052402，052403，052405，052413，052415，05302，05304，05305，05314，05315；1302，1304，1305，13502，13503，13504，13513，13514，135203，135204，135205，1352402，1352403，1352405，1352413，1352415；1402，1403，1405，14203，14204，14205，142502，142503，142504，142513，142514，1425302，1425304，1425305，1425314， 1425315；1502，1503，1504，15203，15204，15205，152402，152403，152405，152413，152415，15302，15304，15305，15314，15315；2402，2403，2405，2413，2415；2502，2503，2504，2513，2514，25302，25304，25305，25314，25315；3502，3503，3504，3513，3514，35203，35204，35205，352402，352403，352405，352413，352415。

，$t=5$ ， 18 $C_n=1^{0}_{-}2^{0}_{-}3^{0}_{-}\cdots(n+1)^{0}_{-}1^{0}_{-}$ ：02402，02503；03513，03514；0413，04204；05204，05305，05315；13513，13514；14204；15314，15315；2402；25314，25315，3513。 ， ，

2 2 。 $C_n=1^{0}_{-}2^{0}_{-}3^{0}_{-}\cdots(n+1)^{0}_{-}1^{0}_{-}$ ，0413，2402，3513 3 4， 5。 2402 02402 ，3513 13513 ， ， 240240…240 351351…351， $C_n=1^{0}_{-}2^{0}_{-}3^{0}_{-}\cdots(n+1)^{0}_{-}1^{0}_{-}$ 2402 3513 ， $n=3k$ ； $C_n=1^{0}_{-}2^{0}_{-}3^{0}_{-}\cdots(n+1)^{0}_{-}1^{0}_{-}$ 0413 04135142042042…042， $n=3k+2$ 。 5 $n=3k$ 。 $n=3k+1$ ， 0，1，2，3，4，5 $t=5$ ， 6。 ： $n=5$ $n=3k+1$ ，$\lambda(C(5,n))=6$。

定理 4 $n\neq5$ ，$\lambda(C(6,n))=5$； $n=5$ ，$\lambda(C(6,5))=6$。

证明 ， $\lambda(P(6,n))=5$[19]， 2 ，$\lambda(C(6,n))\geqslant5$。 ， 5 $t=6$ $n\neq5$ $L(2,1)$— ：

$$\begin{pmatrix}\underline{0} & 2 & \underline{5} & 3 & \underline{0}\\ \underline{5} & 3 & \underline{0} & 2 & \underline{5}\end{pmatrix}$$

$C(6,2)$ 5 $L(2,1)$—

$$\begin{pmatrix}\underline{0} & 2 & \underline{4} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & \underline{4} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0}\\ \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3}\end{pmatrix}$$

$n=3k$

$$\begin{pmatrix}\underline{0} & 5 & \underline{3} & 1 & \underline{5} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0} & 2 & \underline{4} & 0 & \underline{2} & 4 & \cdots & \underline{0} & 2 & \underline{4} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0}\\ \underline{3} & 5 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3}\end{pmatrix}$$

$n=3k+1$

$$\begin{pmatrix}\underline{0} & 5 & \underline{3} & 1 & \underline{5} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0} & 5 & \underline{3} & 1 & \underline{5} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0} & 2 & \underline{4} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & \underline{4} & 0 & \underline{2} & 4 & \underline{0}\\ \underline{3} & 5 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & 5 & \underline{0} & 4 & \underline{2} & 0 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3} & & \underline{3} & 5 & \underline{1} & 3 & \underline{5} & 1 & \underline{3}\end{pmatrix}$$

$n=3k+2$ $n\neq5$

$t=6$ 5 $L(2,1)$—

$\lambda(C(6,n))\leqslant5$。 ： $n\neq5$ ，$\lambda(C(6,n))=5$。

$t=6$ $n=5$ ， 5， $i=0,1,2,3,4,5$， 4 ， l_i i ， l_0,l_1,l_2,l_3,l_4,l_5 a,b,c,d,e,f， ：

1）$a=b=c=d=4$， $e<2,f<2$；

2）$a=b=c=4$， $d<4,e<3,f<3$；

3）$a=b=4$， $c<4,d<4,e<4,f<3$；

4）$a=4$， $b<4,c<4,d<4,e<4,f<4$；

5）$a<4,b<4,c<4,d<4,e<4,f<4$。

，$a+b+c+d+e+f<20$， 20 ， $t=6$ $n=5$ 6。 ， 6 $t=6$ $n=5$ $L(2,1)$— ：

$$\begin{pmatrix}\underline{4} & 2 & \underline{5} & 3 & \underline{0} & 2 & \underline{5} & 3 & \underline{1} & 6 & \underline{4}\\ \underline{1} & 6 & \underline{0} & 2 & \underline{5} & 3 & \underline{0} & 2 & \underline{5} & 3 & \underline{1}\end{pmatrix}$$

$t=6$ $n=5$ 6 $L(2,1)$—

$t=6$， $n=5$ 6。 ： $n\neq 5$ ，$\lambda(C(6,n))=5$； $n=5$ ，$\lambda(C(6,5))=6$。

定理 5 $\lambda(C(7,n))=5$。

证明 ， $\lambda(P(6,n))=5$[19]， 2 ，$\lambda(C(7,n))\geqslant 5$。 ， 5 $t=7$ $L(2,1)$— ：

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$n=2k$

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 4 & & \underline{1} & 3 & & \underline{5} & 2 & & \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & & \underline{5} & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 3 & 0 & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 5 & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & \underline{0} & 3 & 1 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$n=2k+1$

$t=7$ 5 $L(2,1)$—

$\lambda(C(7,n)\leqslant 5$。 ：$\lambda(C(7,n))=5$。

定理 6 $t=8,9,10,11$ ，$\lambda(C(t,n))=5$。

证明 ， $t=8,9,10,11$ ，$\lambda(P(t,n))=5$[19]， 2 ，$\lambda(C(t,n))\geqslant 5$。 ，

5 $t=8,9,10,11$ $L(2,1)$— ：

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & \underline{0} \\ \underline{5} & 3 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 3 & 1 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=8$ 5 $L(2,1)$—

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & & 4 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 1 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & 1 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=9$ 5 $L(2,1)$—

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 5 & 3 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 5 & 3 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 0 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 0 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=10$ 5 $L(2,1)$—

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 4 & 1 & 2 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 4 & 1 & 2 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=11$ 5 $L(2,1)$—

$\lambda(C(t,n))\leqslant 5$。 ： $t=8,9,10,11$ ，$\lambda(C(t,n))=5$。

定理 7 $\lambda(C(12,n))=4$。

证明 ， 1 ，$\lambda(C(12,n))\geqslant 4$[19]。 ， 4 $t=12$ $L(2,1)$— ：

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 3 & 1 & 4 & 2 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 3 & 1 & 4 & 2 & \underline{0} \\ \underline{4} & 1 & 3 & 0 & 2 & \underline{4} & & \underline{4} & 1 & 3 & 0 & 2 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

$t=12$ 5 $L(2,1)$—

$\lambda(C(12,n))\leqslant 4$。 ：$\lambda(C(12,n))=4$。

定理 8 $\lambda(C(13,n))=5$。

证明 ， $\lambda(P(13,n))=5$[19]， 2 ，$\lambda(C(13,n))\geqslant 5$。 ， 5 $t=13$ $L(2,1)$— ：

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & 1 & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 1 & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} & & \underline{5} & 2 & 0 & 4 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=13$ 5 $L(2,1)$—

$\lambda(C(13,n))\leqslant 5$。 :$\lambda(C(13,n))=5$。 [redacted]

定理 9 $t=14,15,16,17,n=2k$,$\lambda(C(t,2$ [redacted] $+1$ [redacted] $t,2k$ [redacted]

证明 , $t=14,15,16,17$,$\lambda(P(t$ [redacted] $=$
$2k$, , ［19］ $t=14,15,16,17$ 4 [redacted] $L(2,1)$— 。
$\lambda(C(t,2k))\leqslant 4$。 : $t=14,15,16,17,n=2k$,$\lambda(C(t$ [redacted]

$n=2k+1$, 4, [redacted] 1 a
0(4), 4(0), , 。 [redacted] 14,1 [redacted] ,$\lambda(C(t,2k+$
$1))>4$。 , $n=2k+1$, 5 $L(2,$ [redacted]

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 5 & 0 & 2 & 4 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \text{[redacted]} & 4 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 0 & 5 & 3 & 1 & \underline{5} & \cdots & \underline{5} & \text{[redacted]} 3 & 1 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=14$ 5 $L(2,$[redacted]$)$—

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} & \cdots & \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=15$ 5 $L(2,1)$—

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} & \cdots & \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=16$ 5 $L(2,1)$—

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & 2 & 4 & 0 & 5 & 1 & 3 & & \underline{0} \\ \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} & \cdots & \underline{5} & 2 & 4 & 0 & 2 & 5 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$t=17$ 5 $L(2,1)$—

,$\lambda(C(t,2k+1))\leqslant 5$。 : $t=14,15,16,17,n=2k+1$,$\lambda(C(t,2k+1))=5$。

定理 10 $t\geqslant 18$,$\lambda(C(t,n))=4$。

证明 , $t\geqslant 18$,$\lambda(P(t,n))=4$[19], 2 ,$\lambda(C(t,n))\geqslant 4$; , ［19］
$t\geqslant 18$ 4 $t\geqslant 18$ $L(2,1)$— 。 : $t\geqslant 18$
,$\lambda(C(t,n))=4$。

3 结 论

P_2 C_n Cartesian

, —— 。

参考文献/References:

[1] CHANG G J, KUO D. The $L(2,1)$—labeling problem on graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics,1993, 15(2): 309-316.

[2] GEORGES J P, MAURO D W. Generalized vertex labelings with a condition at distance two[J]. Congr Numerantium, 1995, 109: 141-159.

[3] GEORGES J P, MAURO D W. Some results on $\lambda_{j,k}$-numbers of the products of complete graphs[J]. Congr Numerantium, 1999, 140: 141-160.

[4] GEORGES J P, MAURO D W, STEIN M I. Labeling products of complete graphs with a condition at distance two[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2001, 14(1): 28-35.

[5] GEORGES J P, MAURO D W, WHITTLESEY M A. Relating path coverings to vertex labelings with a condition at distance two[J]. Discrete Mathematics, 1994, 135(1/2/3): 103-111.

[6] GRIGGS J R, YEH R K. Labeling graphs with a condition at distance 2[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2006, 5(4) : 586-595.

[7] JHA P K, NARAYANAN A, SOOD P, et al. On $L(2,1)$—labeling of the Cartesian product of a cycle and a path[J]. Ars Combinatoria, 2000, 55: 81-89.

[8] YEH R K. A survey on labeling graphs with a condition at distance two[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(12): 1217-1231.

[9] BORODIN O V, KOSTOCHKA A V, WOODALL D R. Total colorings of planar graphs with large maximum degree[J]. Journal of Graph Theory, 1997, 26(1): 53-59.

[10] BORODIN O V, KOSTOCHKA A V, WOODALL D R. List edge and list total colourings of multigraphs[J]. Journal of Combinational Theory Ser B, 1997, 71(2): 184-204.

[11] BORODIN O V, KOSTOCHKA A V, WOODALL D R. Total colorings of planar graphs with large girth[J]. Europe Journal Combination, 1998, 19(1): 19-24.

[12] ISOBE S, ZHOU X, NISHIZEKI T. Total colorings of degenerated graphs[J]. Combinatorica, 2001, 100(2): 506-517.

[13] ROSENFELD M. On the total coloring of certain graphs[J]. Israel Journal of Mathematics, 1971, 9(3): 396-402.

[14] VIJAVYADITYA N. On total chromatic number of a graph[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1971, 2/3(3): 405-408.

[15] LYU Damei, LIN Nianfeng. $L(d,1)$—labelings of edge-path-replacement of a graph[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2013, 26(4): 819-831.

[16] KUO D, YAN J H. On $L(2,1)$—labeling of cartesian products of paths and cycles[J]. Discrete Mathematics, 2004, 283(1): 137-144.

[17] WHITTLESEY M A, GEORGES J P, MAURO D W. On the -number of Q_n and related graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1995, 8(4): 499-506.

[18] LYU Damei, LIN Nianfeng, YAN Dongmei. $L(d,1)$—labelings of the möbius ladders[J]. Journal of Zhejiang University(Science Edition), 2011, 38(3):256-261.

[19] , , , . $L(2,1)$— [J]. ( ),2013,40(4):308-313

DU Juan, LYU Damei, LI Dongdong, et al. The $L(2,1)$—labelings of the similarity ladders[J]. Journal of Liaoning University(Natural Sciences Edition), 2013, 40(4):308-313.

[20] LYU Damei, SUN Jianping. $L(2,1)$—labelings of the edge-multiplicity-paths-replacement of a graph[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016, 31(1):396-404.