:1008-1542(2018)02-0135-07 doi:10.7535/hbkd.2018yx02006

王永文,乔志琴,薛亚奎

(, 030051)

: ,
, 。
, ,
, 。
, Hopf , Hopf
Hopf , ,
Silnikov 。
。

: ; ;Hopf ; ;

:O175.12 MSC(2010) :16S40 :A

:2017-12-25; :2018-03-03; :
: (11401541); (2015011009)

， ， Lorenz [1]，[2-3]， [4]，Genesio [5]，Chua [6] 。
， Silnikov ， [1] Silnikov 。ZHOU [5] Genesio Silnikov ，Genesio 。ZHOU [7] 。 [8] PID Silnikov ， 。 [9-18] 。 FRIEIRE [19] ， ：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2,\\ \dot{x}_2 = x_3,\\ \dot{x}_3 = ax_1 + b_2x_2 + cx_3 + A_1x_1x_3 + A_2x_1x_2 - \dfrac{x_1^2}{2}\end{cases} \tag{1}$$

， a,b,c,A_1,A_2 ， Genesio [5] 。
(1) $x_1 \to x_1 + a, x_2 \to x_2, x_3 \to x_3$， (1)

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_3\\ \dot{x}_3 = \dfrac{a^2}{2} + (b + aA_2)x_2 + (c + aA_1)x_3 + A_1x_1x_3 + A_2x_1x_2 - \dfrac{x_1^2}{2},\end{cases}$$

FRIEIRE [19] ， a,b,c 2 。 1 (1) ， 2 (1) ， (1) Hopf 。

1

， $a=0$ ， (1) $E_1(0,0,0)$， $a\neq 0$ ， (1) 2 $E_1(0,0,0)$ $E_2(2a,0,0)$， E_1 E_2

$$\boldsymbol{D}_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ a & b & c\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{D}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a & b+2aA_2 & c+2aA_1\end{pmatrix},$$

$$\det(\lambda_1 I - \boldsymbol{D}_1) = \lambda_1^3 - c\lambda_1^2 - b\lambda_1 - a = 0 \tag{2}$$

$$\det(\lambda_2 I - \boldsymbol{D}_2) = \lambda_2^3 - (c + 2aA_1)\lambda_2^2 - (b + 2aA_2)\lambda_2 + a = 0。 \tag{3}$$

(3) (2) ， (2)， ， ， a,b,c (2) (，) E_1 ， ， (2) 3 (1) $a<0, c<0, bc+a>0$， E_1 ， 1 。 (3) E_2 ， 。
1 ：

a) $a=b=c=0$ ， E_1 ；

b) $c\neq 0, a=b=0$ ， E_1 ，FRIEIRE [19] $a=b=0$ ， (1) BT ；

c) $b<0, a=c=0$ ， E_1 ； $b<0$，$A_1\neq 0, A_2\neq 0$ ，FRIEIRE [19] $a=c=0$ ， (1) Hopf-zero 。

1 E_1

Tab.1 Local analysis of E_1

a	b	c	(2)	E_1
$=0$	$=0$	$=0$	3	W^c_{loc}
		>0	2 1	W^c_{loc} W^u_{loc}
		<0	2 1	W^c_{loc} W^s_{loc}
	>0		1 、1 1	W^c_{loc}、 W^s_{loc} 1 W^u_{loc}
	<0	$=0$	1 2	W^c_{loc}
		>0	1 2 /	W^c_{loc} W^u_{loc}
		<0	1 2 /	W^c_{loc} W^u_{loc}
>0	$=0$	$=0$	1 2	W^u_{loc} W^s_{loc}
		>0	1 2	2 $\Delta_1>0$
		<0	$4c^3+27a\leqslant 0$ 1 2	W^u_{loc} W^s_{loc}
			$4c^3+27a>0$ 1 2	2 $\Delta_1>0$
	>0	$=0$	$4b^3-27a^2\geqslant 0$ 1 2	W^u_{loc} W^s_{loc}
			$4b^3-27a^2<0$ 1 2	2 $\Delta_1>0$
	<0	$=0$	1 2	2 $\Delta_1>0$
<0	$=0$	$=0$	1 2	W^s_{loc} W^u_{loc}
		>0	$4c^3+27a\geqslant 0$ 1 2	W^s_{loc} W^u_{loc}
			$4c^3+27a<0$ 1 2	2 $\Delta_1>0$
		<0	1 2	2 $\Delta_1>0$
	>0	$=0$	$4b^3-27a^2\geqslant 0$ 1 2	W^s_{loc} W^u_{loc}
			$4c^3+27a<0$ 1 2	2 $\Delta_1>0$
	<0	$=0$	1 2	2 $\Delta_1>0$
		<0	$bc+a>0$ 1 2	W^s_{loc}

2

Silnikov ， (1) 。

， $\Delta_i=\left(\frac{q_i}{2}\right)^2+\left(\frac{p_i}{3}\right)^3$ $\gamma_i=\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}+\sqrt{\Delta_1}}+\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}-\sqrt{\Delta_i}}$ ，

$$\rho_i=-\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}+\sqrt{\Delta_i}}+\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}-\sqrt{\Delta_i}}\right),\ \omega_i=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}+\sqrt{\Delta_i}}-\sqrt[3]{-\frac{q_i}{2}-\sqrt{\Delta_i}}\right),\quad i=1,2。$$

$\lambda_1=\mu_1+\frac{c}{3}$， (2) $\mu_1^3+p_1\mu_1+q_1=0$， $p_1=-\frac{1}{3}c^2-b$，$q_1=-\frac{2}{27}c^3-\frac{1}{3}bc-a$，

，$\Delta_1=\frac{a^2}{4}-\frac{b^3}{27}+\frac{a}{27}c^3-\frac{b^2}{108}c^2+\frac{ab}{6}c$。

：

$\Delta_1>0$ ， (2) 1 2

$$\lambda_{11}=\frac{c}{3}+\gamma_1,\quad \lambda_{12}=\frac{c}{3}+\rho_1+\mathrm{i}\omega_1,\quad \lambda_{13}=\frac{c}{3}+\rho_1-\mathrm{i}\omega_1。$$

$\Delta_1=0$ ， (2) 2

$$\lambda_{11}=\frac{c}{3}+2\sqrt[3]{-\frac{q_1}{2}},\quad \lambda_{12}=\frac{c}{3}-\sqrt[3]{-\frac{q_1}{2}},(\qquad)。$$

%00

$\Delta_1 < 0$ ，$p_1 < 0$ ， （2） 3

$\lambda_{11} = \frac{c}{3} - 2\sqrt{-3p_1}$

,

$$D_{1a} \triangleq D_1|_{a=a_h} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc & b & c \end{pmatrix}, \quad B(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2A_1x_1y_3+2A_2x_1y_2-x_1y_1 \end{pmatrix}$$

$C(x,y,z)=(0,0,0)^{T}$, $x=(x_1,x_2,x_3)^{T}$, $y=(y_1,y_2,y_3$ [redacted] $z=(z_1,z_2,z_3)^{T}$。

$D_{1a}Q_1=\mathrm{i}\omega Q_1$, $D_{1a}^{T}P_1=-\mathrm{i}\omega P_1$ $\langle P_1,Q_1$ [redacted] $\sum_{i=1}^{3} P_{1i}\bar{Q}_{1i}=1$ P_1, Q_1。

, :

$$P_1=\frac{1}{2[b+c\sqrt{-b}\,i]}\begin{pmatrix} c\sqrt{-b}\,i \\ -c-\sqrt{-b} \\ 1 \end{pmatrix}$$ [redacted] $$Q_1=\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-b}\,i \\ b \end{pmatrix}。$$

,

$B(Q_1,Q_1)=(0,0,2A_1b-1+2A_2\ \ -b$ [redacted]

I

— B

2— b

I

$$\dot{x}=D_{2c}x+\frac{1}{2}B(x,x)+\frac{1}{6}C(x,x,x)+O(\| x \|^4),$$

$x,B(x,x),C(x,x,x)$ (4) ,

$$\boldsymbol{D}_{2c}\triangleq\boldsymbol{D}_2|_{c_{c_h}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a & b+2aA_2 & \dfrac{a}{b+2aA_2}\end{pmatrix}。$$

$\boldsymbol{D}_{2c}\boldsymbol{Q}_2=\mathrm{i}\hat{\omega}\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{D}_{2c}^{*}\boldsymbol{P}_2=-\mathrm{i}\hat{\omega}\boldsymbol{P}_2$, $\langle\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{Q}_2\rangle=1$。 :

$$\boldsymbol{P}_2=\frac{1}{2[b+2aA_2+\frac{a}{b+2aA_2}\sqrt{-(b+2aA_2)}\,i]}\begin{pmatrix}\dfrac{a}{b+2aA_2}\sqrt{-(b+2aA_2)}\,i\\ -\dfrac{a}{b+2aA_2}-\sqrt{-(b+2aA_2)i}\\ 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_2=\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{-(b+2aA_2)i}\\ b+2aA_2\end{pmatrix},$$

[20] :

$$l_{21}(0)=\frac{1}{2\hat{\omega}}\mathrm{Re}(-2\langle\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{D}_{2c}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_1,\bar{\boldsymbol{Q}}_2))\rangle+\langle\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{B}(\bar{\boldsymbol{Q}}_2(2\mathrm{i}\hat{\omega}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{D}_{2c})^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_2))\rangle)-$$
$$\frac{6A_2a^3(b+2aA_2)+(8A_1A_2a^3-a^2)(b+2aA_2)^2+(8A_2^2-6A_1)a^2(b+2aA_2)^3=4a(3A_2+4A_1^2a)(b+2aA_2)^4+8(1+2A_1A_2a)(b+2aA_2)^5-16A_1(b+2aA_2)^6}{4\sqrt{-(b+2aA_2)}[(b+2aA_2)^3-a^2][4(b+2aA_2)^3-a^2]}。$$

4 $a\neq 0,b+2aA_2<0$, (1) $c=c_h$ E_2 Hopf , $l_{21}<0$, (1) E_2 Hopf ; $l_{21}>0$, (1) E_2 Hopf 。

4

,

, ,

Hopf , Hopf 。

Shilnikov 。

/References:

[1] , . Lorenz 、 [M]. : , 2003.

[2] LYU Jinhu, CHEN Guanrong. A new chaotic attractor coined[J]. International Journal of Bifurcations and Chaos, 2002, 12(3): 659-661.

[3] YU Yongguang, ZHANG Suochun. Hopf bifurcation analysis of the Lü system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2004, 21(5): 1215-1220.

[4] . [J]. ,2008, 29 (3): 182-184.
DENG Xueming. Analysis of bifurcation topological structure of non-linear system[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2008, 29(3):182-184.

[5] ZHOU Liangqiang, CHEN Fangqi. Hopf bifurcation and Shilnikov chaos of Genesio system[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2009, 40(3): 1413-1422.

[6] EUZEBIO R, LLIBRE J. Zero-Hopf bifurcation in a Chua system[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2017, 37: 31-40.

[7] ZHOU Tianshou, CHEN Guanrong, YANG Qigui. Constructing a new chaotic system based on the Silnikov criterion[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2004, 19(4): 985-993.

[8] , . PID Shilnikov Smale [C]// . : ,2009:212-219.

[9] . [J]. , 2010, 40(14): 197-202.

ZHANG Kangming. Analysis of a 3D chaotic system with only one saddle foci equilibrium[J]. Mathematics in Practice and Theory，2010，40(14)：197-202.

[10] BAO Jianhong，YANG Qigui. A new method to find homoclinic and heteroclinic orbits[J]. Applied Mathematics and Computation，2011，217：6526-6540.

[11] ， ， . Silnikov [J]. ( )，2011，38(1)：140-143.

WEI Fei，LI Wei，CHEN Ming. Constrction of dynamic system having Silnikov's saddle-focus homoclinic orbit[J]. Journal of Beijing University of Chemical Technology(Natural Science)，2011，38(1)：140-143.

[12] . Hopf [J]. ( )，2014，32(1)：75-77.

ZHU Daoyu. Degenerate Hopf bifurcation in a special 3D chaotic system[J]. Journal of Hubei University for Nationalities(Natural Science Edition)，2014，32(1)：75-77.

[13] . [J]. ，2015，33(4)：509-511.

ZHANG Juan. The pitchfork bifucation analysis of 3D chaotic system[J]. Henan Science，2015，33(4)：509-511.

[14] ALGEBA A，DOMINGUEZ M，MERINO M，et al. Takens-Bogdanov bifurcations of equilibria and periodic orbits in the Lorenz system [J]. Commun Nonlinear Sci Number Simulat，2016，30：328-343.

[15] HE Qiong，XIONG Haiyun. Shilnikv chaos and Hopf bifurcation in three-dimensional differential system[J]. Optik International Journal for Light and Electron Optics,2016，127(19)：7468-7655.

[16] ELSONBATY A，ELSADANY A. Bifurcation analysis of chaotic geomagnetic field model[J]. Chaos，Solitons & Fractals，2017，103：325-335.

[17] ALGABA A,FEMANDEE-SANCHEEF，MERINO M，et al. Comments on "Shilnikv chaos and Hopf bifurcation in three-dimensional differential system"[J]. Optik International Journal for Light and Electron Optics，2018，155：251-256.

[18] WANG Haijun，LI Xianyi. A novel hyperchaotic system with infinitely many heteroclinic orbits coined[J]. Chaos，Solitons & Fractals，2018，106：5-15.

[19] FRIEIRE E，GARMERO E，ALGABA A，et al. A note on the triple zero linear degeneracy：Normal forms，dynamical and bifurcation behaviors of an unfolding[J]. International Journal of Bifurcations and Chaos，2002，12(12)：2799-2820.

[20] KUZNETSOV Y. Elements of Applied Bifurcation Theory[M]. New York：Spring-Verlag，1998.