第 38 卷第 6 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol.38,No.6
2017 年 12 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Dec. 2017

文章编号:1008-1542(2017)06-0536-06　　doi:10.7535/hbkd.2017yx06005

带有局部干扰的 Euler-Bernoulli 梁方程的稳定性分析

韩鹏程,刘丹红

(天津大学数学学院,天津　300350)

摘　要:为了丰富控制理论中关于系统稳定性问题的理论,以 Euler-Bernoulli 梁方程为研究对象,研究了带有局部干扰的 Euler-Bernoulli 梁方程的稳定性问题。设计了一个基于输出的反馈控制器用于抑制干扰产生的影响,采用极大单调算子理论证明非线性闭环系统的适定性,即证明闭环系统的解的存在性与唯一性。设立适当的状态空间,定义适当的内积,进一步定义了符合此状态空间的非线性算子,将系统转化为抽象发展方程的形式,在此基础上,证明了闭环系统的解的存在性与唯一性。通过构造合适的 Lyapunov 函数,对闭环系统的稳定性问题进行研究,证明了闭环系统的渐近稳定性。结果表明,设计出合适的抗干扰控制器是研究系统稳定性的基础,研究带有局部干扰的 Euler-Bernoulli 梁方程的稳定性能够证明系统是具有渐进稳定性的,此方法可以推广到对诸如波方程、Timoshenko 梁方程、薛定谔方程等系统的研究。

关键词:稳定性理论;Euler-Bernoulli 梁方程;局部反馈控制;局部干扰;适定性;渐近稳定性

中图分类号:O175.21;O231.2　　**MSC(主题分类)**:34D20　　**文献标志码**:A

Stabilization analysis of Euler-Bernoulli beam equation with locally distributed disturbance

HAN Pengcheng, LIU Danhong

(Mathematics Department, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: In order to enrich the system stability theory of the control theories, taking Euler-Bernoulli beam equation as the research subject, the stability of Euler-Bernoulli beam equation with locally distributed disturbance is studied. A feedback controller based on output is designed to reduce the effects of the disturbances. The well-posedness of the nonlinear closed-loop system is investigated by the theory of maximal monotone operator, namely the existence and uniqueness of solutions for the closed-loop system. An appropriate state space is established, an appropriate inner product is defined, and a non-linear operator satisfying this state space is defined. Then, the system is transformed into the form of evolution equation. Based on this, the existence and uniqueness of solutions for the closed-loop system are proved. The asymptotic stability of the system is studied by constructing an appropriate Lyapunov function, which proves the asymptotic stability of the closed-loop system. The result

收稿日期:2017-03-24;修回日期:2017-09-28;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金(61174080)

第一作者简介:韩鹏程(1989—),男,河北沧州人,硕士研究生,主要从事控制理论方面的研究。

通信作者:刘丹红副教授。E-mail:liudanhong@eyou.com

韩鹏程,刘丹红.带有局部干扰的 Euler-Bernoulli 梁方程的稳定性分析 [J].河北科技大学学报,2017,38(6):536-541.

HAN Pengcheng,LIU Danhong.Stabilization analysis of Euler-Bernoulli beam equation with locally distributed disturbance[J].Journal of Hebei University of Science and Technology,2017,38(6):536-541.

shows that designing proper anti-interference controller is the foundation of investigating the system stability, and the research of the stability of Euler-bernoulli beam equation with locally distributed disturbance can prove the asymptotic stability of the system. This method can be extended to study the other equations such as wave equation, Timoshenko beam equation, Schrodinger equation, etc.

Keywords: theory of stability; Euler-Bernoulli beam equation; local feedback control; locally distributed disturbance; well-posedness; asymptotic stabilization

干扰，尤其是在控制领域和工程领域中的干扰是普遍存在的，所以抗干扰问题在现代控制理论研究领域非常热门，越来越多的数学学者和工程技术研究人员参加到了抗干扰问题的研究当中。文献[1]利用滑模方法(SMC)进行抗干扰问题的研究；文献[2]采用了自抗扰控制(ADRC)的方法进行抗干扰研究；文献[3－4]中利用自适应控制方法研究了干扰问题；文献[5－15]研究了系统中含有时滞的稳定性问题；LIANG 等[16]研究了被改进 Smith 预估器对于带有便捷控制的 Euler-Bernoulli 梁方程的稳定性；GUO 等[17-18]求解了具有延迟观测和边界控制的定长变系数 Euler-Bernoulli 梁方程的镇定问题；GUO 等[19]利用自抗干扰和滑膜控制的方法研究了带有边界输入扰动的 Euler-Bernoulli 梁方程的稳定性问题；文献[20－22]研究了边界带有干扰的 Euler-Bernoulli 梁方程的反馈镇定问题。

本研究考虑下面系统，系统的动态行为被 Euler-Bernoulli 梁方程掌控，具体描述如式(1)所示：

$$\begin{cases} y_{tt}+y_{xxxx}(x,t)=u(x,t)+R(x,t),\ x\in(0,1),t\geqslant 0, \\ y(0,t)=y_x(0,t)=y_{xx}(1,t)=y_{xxx}(1,t)=0,\ x\in(0,1), \\ y(x,0)=y_0(x),y_t(x,0)=y_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

式中：$u(x,t)$是输入；$R(x,t)$表示局部干扰，即 $R(x,t)\neq 0,x\in[\alpha,1],1>\alpha>0,t>0$。因为干扰的能量是有限的，所以假设 $R(x,t)$是有界可测的，即存在 $M\in R^+$使得$|R(x,t)|\leqslant M$。

1　控制器的设计

本部分给出系统(1)的控制器设计。首先，定义能量函数：

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1(y_t^2(x,t)+y_{xx}^2(x,t))\mathrm{d}x,$$

经过计算得：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=&\int_0^1[y_t(x,t)y_{tt}(x,t)+y_{xx}(x,t)y_{xxt}(x,t)]\mathrm{d}x= \\ &\int_0^1 y_t(x,t)[-y_{xxxx}(x,t)+u(x,t)+R(x,t)]\mathrm{d}x+\int_0^1 y_{xx}(x,t)y_{xxt}\mathrm{d}x= \\ &y_{xx}(x,t)y_{xt}(x,t)\mid_0^1-y_t(x,t)y_{xxx}(x,t)\mid_0^1+\int_0^1 y_t(x,t)y_{xxxx}(x,t)\mathrm{d}x- \\ &\quad\int_0^1 y_t(x,t)y_{xxxx}(x,t)\mathrm{d}x+\int_0^1 y_t(x,t)[u(x,t)+R(x,t)]\mathrm{d}x= \\ &\int_0^1 y_t(x,t)[u(x,t)+R(x,t)]\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

设计控制器为

$$u(x,t)=-p(x)[ky_t(x,t)+M\mathrm{sign}(y_t(x,t))], \tag{2}$$

其中：k 为正常数；$M=\sup\limits_{t>0}|R(x,t)|$；$p(x)$满足如下条件：$p(x)\in C^1[0,1]$，$p(x)\begin{cases}>1,x\in[\alpha,1] \\ =0,x\in[0,\alpha)\end{cases}$，同时存在 $r(x,t)$，使得 $R(x,t)=p(x)r(x,t)$，即$\sup\limits_{t>0}|r(x,t)|\leqslant M$。

另外，定义 sign 多值函数为

$$\mathrm{sign}(f(\cdot))=\begin{cases}1,\quad f(x)>0, \\ (-1,1),\quad f(x)=0, \\ -1,\quad f(x)<0。\end{cases}$$

因此，结合式(2)得到在控制器 $u(x,t)$ 下的系统(1)可以写成：

$$\begin{cases} y_{tt}+y_{xxxx}(x,t)+p(x)[ky_t(x,t)+M\mathrm{sign}(y_t(x,t))-r(x,t)]=0, \quad x\in(0,1),t>0, \\ y(0,t)=y_x(0,t)=y_{xx}(1,t)=y_{xxx}(1,t)=0, \\ y(x,0)=y_0(x),y_t(x,0)=y_1(x)。\end{cases} \tag{3}$$

2　系统的适定性分析

笔者讨论闭环系统(3)的适定性，为此，首先将系统(3)放在一个合适的 Hilbert 状态空间中讨论。

$$H_E^2(0,1)=\{f(x)\in H^2(0,1)\mid f(0)=f'(0)=0\},$$

其中 $\boldsymbol{H}^k(0,1)$ 是通常意义下的 k 阶 Sobolev 空间[23]。

定义状态空间：$\boldsymbol{H}=H_E^2(0,1)\times L^2(0,1)$，显然，$\boldsymbol{H}$ 是一个 Hilbert 空间。

在空间中设定内积如下：对于任意的 $Y_1=(y_1,z_1)\in\boldsymbol{H}$，$y_2=(y_2,z_2)\in\boldsymbol{H}$，

$$<Y_1,Y_2>_{\boldsymbol{H}}=\int_0^1[(y''_1(x)y''_2(x)+z_1(x)z_2(x)]\mathrm{d}x。$$

定义算子 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z \\ -y_{xxxx}-p(x)kz-p(x)M\mathrm{sign}(z) \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})=\{(y,z)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{H}\mid y(0)=y'(0)=y''(1)=y'''(1)=0\}$，那么，系统(3)可以写成空间 $\boldsymbol{H}$ 中的一个非线性发展方程：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{Y}}(t)=\boldsymbol{AY}(t)+\boldsymbol{f}(t), \quad t>0, \\ \boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{Y}_0(t), \end{cases}$$

其中：$\boldsymbol{Y}(t)=(y(\cdot,t),y_t(\cdot,t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}(t)=(0,r(\cdot,t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Y}(0)=(y_0(t),y_1(t))^{\mathrm{T}}$。

命题 1　系统算子 $\boldsymbol{A}$ 如前定义，在反馈控制(2)下，$\boldsymbol{A}$ 是 Hilbert 空间 $\boldsymbol{H}$ 中的一个极大单调算子。

定理 1　系统算子 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{H}$ 如前定义，则对于任意的 $\boldsymbol{Y}_0\in\overline{D(\boldsymbol{A})}$，系统(3)有唯一的温和解。

证明

Step1：单调性

对于任意的 $\boldsymbol{Y}_i=(y_i,z_i)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{H}$，$i=1,2$，由分部积分可以得到：

$$<\boldsymbol{A}Y_1-\boldsymbol{A}Y_2,Y_1-y_2>=$$

$$\int_0^1[(z_1-z_2)''(y_1-y_2)''+(z_1-z_2)[-(y_1^{(4)}-y_2^{(4)})p(x)k(z_1-z_2)-$$

$$p(x)k(z_1-z_2)-p(x)M(\mathrm{sign}(z_1)-\mathrm{sign}(z_2))]=$$

$$\int_0^1[(z_1-z_2)''(y_1-y_2)''-(z_1-z_2)(y_1^{(4)}-y_2^{(4)})-$$

$$p(x)k(z_1-z_2)^2-p(x)M(z_1-z_2)(\mathrm{sign}(z_1)-sign(z_2))]\mathrm{d}x=$$

$$-k\int_0^1 p(x)(z_1-z_2)^2\mathrm{d}x-p(x)M\int_0^1(z_1-z_2)(\mathrm{sign}(z_1)-\mathrm{sign}(z_2))\mathrm{d}x,$$

因为对于任意的 $z_1,z_2\in\mathbf{R}$，$(z_1-z_2)(\mathrm{sign}(z_1)-\mathrm{sign}(z_2))\geqslant 0$，有：

$$\langle\boldsymbol{A}Y_1-\boldsymbol{A}Y_2,Y_1-Y_2\rangle\leqslant -k\int_0^1 p(x)(z_1-z_2)^2\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是单调的。

Step2：极大性

根据极大算子的定义可知，只需要证明 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{H}$。即对于任意的 $(f,g)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{H}$，存在 $(y,z)^{\mathrm{T}}\in D(\boldsymbol{A})$。考虑预解方程：$(I-\boldsymbol{A})(y,z)^{\mathrm{T}}=(f,g)^{\mathrm{T}}$，即，

$$\begin{cases} y(x)-z(x)=f(x), \\ z(x)+y_{xxxx}(x)+p(x)kz(x)+p(x)M\mathrm{sign}(z(x))=g(x)。\end{cases} \tag{4}$$

由方程(4)的第 1 个方程得 $z(x)=y(x)-f(x)$，代入第 2 个方程得到：

$$f_{xxxx}(x)+(1+kp(x))y(x)+p(x)M\mathrm{sign}(y(x)-f(x))=g(x)+(1+kp(x))f(x)。 \tag{5}$$

解方程(5)，取乘子 $v(x)\in H_E^2(0,1)$ 在式(5)的两端分别乘以 v 并从 0 到 1 积分得：

$$\int_0^1[g(x)+(1+kp(x))f(x)]v(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1[y_{xxxx}(x)+(1+kp(x))y(x)-p(x)M\mathrm{sign}(y(x)-f(x))]v(x)\mathrm{d}x=$$
$$\int_0^1 y_{xx}(x)v_{xx}(x)\mathrm{d}x+\int_0^1(1+kp(x))y(x)v(x)\mathrm{d}x+M\int_0^1 p(x)\mathrm{sign}(y(x)-f(x))v(x)\mathrm{d}x。$$

引入一个定义在 $H_E^2(0,1)$ 的新的泛函：

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_0^1 v_{xx}^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1(1+kp(x))v^2(x)\mathrm{d}x+M\int_0^1 p(x)\mid v(x)-f(x)\mid\mathrm{d}x-$$
$$\int_0^1[(1+kp(x))f(x)+g(x)]v(x)\mathrm{d}x,$$

易知 $\lim\limits_{\|v\|\to\infty}\dfrac{J(v)}{\|v\|}=+\infty$，称 $J(v)$ 在 $H_E^2(0,1)$ 上是强制的。也就是说存在一个常数 c 使得 $c=\inf\limits_{y\in H_E^2(0,1)}J(v)$，即 $J(v)$ 在 $H_E^2(0,1)$ 上存在极小值。

另外，$J(v)$ 在 $H_E^2(0,1)$ 上是强凸的，即对于任意的 $v_1,v_2\in H_E^2(0,1)$，$s\in[0,1]$ 有：

$$sJ(v_1)+(1-s)J(v_2)-J(sv_1+(1-s)v_2)\geqslant\frac{s(1-s)}{2}\|v_1-v_2\|^2。\tag{6}$$

计算如下：

$$\frac{s}{2}\int_0^1 v_{1xx}^2(x)\mathrm{d}x+\frac{s}{2}\int_0^1(1+kp(x))v_1^2(x)\mathrm{d}x+sM\int_0^1 p(x)\mid v_1(x)-f(x)\mid\mathrm{d}x-$$
$$s\int_0^1[(1+kp(x))f(x)+g(x)]v_1(x)\mathrm{d}x+\frac{1-s}{2}\int_0^1(1+kp(x))v_2^2(x)\mathrm{d}x+\frac{1-s}{2}\int_0^1 v_{2xx}^2(x)\mathrm{d}x+$$
$$(1-s)M\int_0^1 p(x)\mid v_2(x)-f(x)\mid\mathrm{d}x-(1-s)\int_0^1[(1+kp(x))f(x)+g(x)]v_2(x)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1(sv_{1xx}+(1-s)v_{2xx})^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1(1+kp(x))(sv_1+(1-s)v_2)^2\mathrm{d}x-$$
$$M\int_0^1 p(x)\mid sv_1+(1-s)v_2-f(x)\mid\mathrm{d}x+\int_0^1[(1+kp(x))f(x)+g(x)](sy_1+(1-s)v_2)\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{s(1-s)}{2}\int_0^1(v_{1xx}-v_{2xx})^2\mathrm{d}x+\frac{s(1-s)}{2}\int_0^1(1+kp(x))(v_1-v_2)^2\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{s(1-s)}{2}\int_0^1(v_{1xx}-v_{2xx})^2\mathrm{d}x+\frac{s(1-s)}{2}\int_0^1(v_1-v_2)^2\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\frac{s(1-s)}{2}\|v_1-v_2\|^2,$$

所以 A 是极大算子。

定理 2　$H_E^2(0,1)$ 是一个 Hilbert 空间，泛函 $J(v)$ 在 $H_E^2(0,1)$ 上是强凸的，则存在唯一的点 v 使得 $\inf\limits_{v\in H_E^2(0,1)}J(v)=J(w)$。

证明　因为 $c=\inf\limits_{v\in H_E^2(0,1)}J(v)$，根据极小值的定义，可知存在一组序列 $\{v_n\}\in H_E^2(0,1)$，使得 $J(v_n)\to c$。

首先证明 $\{v_n\}$ 是柯西序列。根据定义可知对于任意的 $v_m,v_n\in H_E^2(0,1)$，有 $sv_m+(1-s)v_n\in H_E^2(0,1)$，所以 $J(sv_m+(1-s)v_n)\geqslant c$。因为函数 $J(v)$ 在 $H_E^2(0,1)$ 上是强凸的，根据不等式(6)有：

$$\frac{s(1-s)}{2}\|v_m-v_n\|^2\geqslant sJ(v_m)+(1-s)J(v_n)-J(sv_m+(1-s)v_n)\geqslant c-c\to 0,$$

所以 $\{v_n\}$ 是柯西序列。

另外，$H_E^2(0,1)$ 是一个 Hilbert 空间，所以存在一个点 $w\in H_E^2(0,1)$，使得 $c=J(w)$。因为 $\inf\limits_{y\in H_E^2(0,1)}J(v)=J(w)$，所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}J(w+sv)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=0$，表明 $w\in H_E^2(0,1)$，并且

$$\left.\frac{\mathrm{d}J(w+sv)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}=\int_0^1 w_{xx}(x)v_{xx}(x)\mathrm{d}x+\int_0^1(1+kp(x))w(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 Mp(x)\mathrm{sign}(w(x)-f(x))\mathrm{d}x-\int_0^1[(1+kp(x))f(x)+g(x)]v(x)\mathrm{d}x=0。$$

特别地，对于任意的 $v\in C_0^{\infty}(0,1)$，有：

$$\int_0^1[w_{xxxx}(x)+(1+kp(x))w(x)+p(x)M\mathrm{sign}(w(x)-f(x))]v(x)\mathrm{d}x-\int_0^1[g(x)+(1+kp(x))f(x)]v(x)\mathrm{d}x=0。$$

所以有：

$$\begin{cases}w(0)=w_x(0)=w_{xx}(1)=w_{xxx}(1)=0,\\ w\in \boldsymbol{H}_E^2(0,1),\end{cases}$$

由此证明 $(w,w-f)\in D(\boldsymbol{A})$ 能够唯一满足预解方程(4)。

因此，$J(w)$ 存在唯一的极小值点满足式(4)。$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{H}$，证毕。

3 稳定性研究

本研究主要通过 Lyapunov 方法研究系统(3)的稳定性问题。

引理 1[24] 对于系统(3)，若存在一个连续一阶可微的正定函数 $V(t)$，满足 $V'(t)\leqslant 0$，则系统是稳定的；若满足 $V'(t)<0$ 则系统是渐近稳定的。

定理 3 假设系统(3)的扰动 $|R(x,t)|<M$ 如之前定义，对于任意初值 $(y,z)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{H}$，系统是稳定的，并且在 $y_t(x,t)\neq 0$ 时，系统是渐近稳定的。

证明 设 $V(t)=E(t)=\frac{1}{2}\int_0^1(y_{xx}^2(x,t)+y_t^2(x,t))\mathrm{d}x$，关于 t 求导得到：

$$\overset{g}{V}(v)=\int_0^1 y_t(x,t)[u(x,t)+R(x,t)]\mathrm{d}x=\int_0^1 y_t(x,t)[-p(x)[ky_t(x,t)+M\mathrm{sign}(y_t(x,t))]+p(x)r(x)]=$$
$$-\int_0^1 kp(x)y_t^2(x,t)\mathrm{d}x-\int_0^1 y_t(x,t)p(x)[M\mathrm{sign}(y_t(x,t))-r(x,t)]\mathrm{d}x=$$
$$-\int_0^1 kp(x)y_t^2(x,t)\mathrm{d}x-\int_0^1 p(x)M\mid y_t(x,t)\mid\mathrm{d}x+\int_0^1 p(x)y_t(x,t)r(x,t)\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-\int_0^1 kp(x)y_t^2(x,t)\mathrm{d}x-\int_0^1 p(x)M\mid y_t(x,t)\mid\mathrm{d}x+\int_0^1 p(x)M\mid y_t(x,t)\mid\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-\int_0^1 kp(x)y_t^2(x,t)\mathrm{d}x,$$

易知，$\overset{g}{V}(t)\leqslant 0$，即系统(3)是稳定的，又因为 $k>0$，$p(x)>0$，所以当 $y_t(x)\neq 0$ 时，$\overset{g}{V}(t)<0$ 是成立的。故当 $y_t(x)\neq 0$ 成立时，系统是渐近稳定的。

4 结 论

以 Euler-Bernoulli 梁方程为研究对象，对闭环系统的稳定性问题进行讨论，主要研究了具有局部扰动的 Euler-Bernoulli 梁系统的稳定性问题。首先，为了抑制干扰带来的影响，设计了一个非线性反馈控制器；然后，利用极大单调算子理论详细地证明了系统的适定性；最后，利用 Laypunov 函数的方法，证明了系统的稳定性和渐近稳定性。通过对此系统的研究发现，在对具有干扰的系统进行研究时，抗干扰控制器的设计是尤为重要的，设计出合适的控制器是进行下一步研究的必要准备。本研究主要对具有局部干扰的

Euler-Bernoulli梁系统进行了研究,证明了系统的渐近稳定性,今后将把这种研究方法推广到其他系统,例如:波方程、Timoshenko 梁方程、薛定谔方程等。

参考文献/References:

[1] GUO B Z, JIN F F.Sliding mode and active disturbance rejection control to stabilization of one-dimensional anti-stable wave equations subjects to disturbance in boundary input[J].IEEE Transactions on Automatic Control, 2013,58(5):1269-1274.

[2] GUO B Z, JIN F F. Sliding mode and active disturbance rejection control to stabilization of one-dimensional anti-Stable wave equations subject to disturbance in boundary input[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(5):1269-1274.

[3] KRSTIC M. Adaptive control of an anti-stable wave PDE[J]. American ControlConference,2009,17(6):1505-1510.

[4] GUO W, GUO B Z. Parameter estimation and non-collocated adaptive stabilization for a wave equation subject to general boundary harmonic disturbance[J].IEEE Transactions on Automatic Control, 2013,58(7):1631-1643.

[5] XU G Q, YUNG S P, LI L K. Stabilization of wave systems with input delay in the boundary control[J]. Esaim Control Optimization & Calculus of Variations, 2006,12(4):770-785.

[6] SHANG Y F, XU G Q, CHEN Y L. Stability analysis of Euler-Bernoulli beam with input delay in the boundary control[J].Asian Journal of Control,2012,14(1):186-196.

[7] SHANGY F, XU G Q. Stabilization of an Euler-Bernoulli beam with input delay in the boundary control[J].Systems & Control Letters, 2012,61(11):1069-1078.

[8] WANG H, XU Genqi. Exponential stabilization of 1-d wave equation with input delay[J]. Wseas Transactions on Mathematics, 2013, 12(10):1001-1013.

[9] XU Genqi, WANG Hongxia. Stabilization of Timoshenko beam system with delay in the boundary control[J]. International Journal of Control, 2013,86(6):1165-1178.

[10] LIU X F, XU G Q. Exponential stabilization for Timoshenko beam with distributed delay in the boundary control[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013(4):1-15.

[11] HAN Z J, XU G Q. Output-based stabilization of Euler-Bernoulli beam with time-delay in boundary input[J]. Ima Journal of Mathematical Control & Information, 2014, 31(4):533-550.

[12] LIU X F, XU G Q. Output-based stabilization of Timoshenko beam with the boundary control and input distributed delay[J]. Journal of Dynamical & Control Systems, 2015,56(12):1-21.

[13] DAI Q, YANG Z. Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay[J].Zeitschrift für Angewandte Mathematik Und Physik,2014, 65(5):885-903.

[14] NICAISE S, PIGNOTTI C. Exponential stability of abstract evolution equations with time delay[J]. Journal of Evolution Equations, 2015, 15(1):107-129.

[15] XU G Q,HAN P C, LI Y F, et al.The exponential stability result of an Euler-Bernoulli beam equation with interior delays and boundary damping[J].Journal of Difference Equations,2016(10):1-10.

[16] LIANG J S, CHEN Y Q, GUO B Z. A new boundary control method for beam equation with delayed boundary measurement using modified smith predictors[J].IEEE Conference on Decision and Control, 2004,1(1):809-814.

[17] GUO B Z,YANG K Y. Dynamic stabilization of an Euler-Bernoulli beam equation with time delay in boundary observation[J].Automatica,2009,45(6):1468-1475.

[18] YANG K Y, LI J J, ZHANG J. Stabilization of Euler-Bernoulli beam equations with variable coefficients under delayed boundary output feedback[J].Electronic Journal of Differential Equations,2015, 2015(75):1-14.

[19] GUO B Z,JIN F F.The active disturbance rejection and sliding mode control approach to the stabilization of the Euler-Bernoulli beam equation with boundary input disturbance[J]. Automatica,2013,49(9):2911-2918.

[20] JIN F F, GUO B Z. Lyapunov approach to output feedback stabilization for the Euler-Bernoulli beam equation with boundary input disturbance[J]. Automatica, 2015, 52(C):95-102.

[21] 周华成,寇春海. Euler-Bernoulli 梁方程基于边界分数阶导数反馈控制的镇定[J].应用数学与计算数学学报,2015,29(2):211-221.
ZHOU Huacheng, KOU Chunhai. Stabilization of Euler-Bernoulli beam equations via boundary fractional derivative feedback control[J]. Communication on Applied Mathematics and Computation, 2015,29(2):211-221.

[22] 卢小瑞. 边界带有干扰的 Euler-Bernoulli 梁方程的输出反馈稳定[J].中北大学学报(自然科学版).2015, 36(2):103-107.
LU Xiaorui. Output feedback stability for a Euler-Bernoulli beam equation with boundary disturbance[J]. Journal of North University of China (Natural Science Edition), 2015, 36(2):103-107.

[23] BARBU V. Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces[M]. New York: Springer,2010.

[24] 刘豹,唐万生. 现代控制理论[M].北京:机械工业出版社,2006.