第 38 卷第 4 期 河北科技大学学报 Vol. 38, No. 4
2017 年 8 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Aug. 2017

文章编号:1008-1542(2017)04-0352-08 doi:10.7535/hbkd.2017yx04006

Alexandrov 空间的公理体系

张山山[1],李　扉[2],姚　卫[1]

(1.河北科技大学理学院,河北石家庄　050018;2.北京林业大学理学院,北京　100081)

摘　要: 为了研究 Alexandrov 空间的内部公理体系和序方面的特征,利用点集拓扑学和 Locale 理论中的已有结论,将各结构限制到 Alexandrov 空间的框架中,得到 Alexandrov 空间的等价刻画。研究结果表明 Alexandrov 空间在范畴意义下同构于 Alexandrov 邻域系统、Alexandrov 闭包算子、Alexandrov 内部算子、Alexandrov 导算子等,T_0 的 Alexandrov 空间同构于偏序集、对偶等价于完全生成格。Alexandrov 空间可以用邻域系统、闭包算子、内部算子、导算子,特殊化序和无点化序进行等价刻画。

关键词: 拓扑学;Alexandrov 空间;邻域系统;闭包算子;内部算子;导算子;特殊化序;完备生成格

中图分类号: O189　　**MSC(2010)主题分类:** 54A05　　**文献标志码:** A

Axiomatic systems of Alexandrov spaces

ZHANG Shanshan[1], LI Fei[2], YAO Wei[1]

(1. School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 2. School of Science, Beijing Forest University, Beijing 100081, China)

Abstract: In order to study internel axiomatic systems and ordered features of Alexandrov spaces, with the help of some existed results in topology and locale theory, by restricting the related structures into Alexandrov setting, some equivalent descriptions are obtained. The results show that Alexandrov spaces are categorically isomorphic to Alexandrov neighborhood systems, Alexandrov closure operators, Alexandrov interior operators and Alexandrov derived operators; T_0 Alexandrov spaces are isomorphic to posets and dual to complete-generated lattices. Alexandrov spaces can be completely characterized by neighborhood systems, closure operators, interior operators, derived system, the specialization order and the point-free order.

Keywords: topology; Alexandrov space; neighborhood system; closure operator; interior operator; derivation operator; specialization order; complete-generated lattice

Alexandrov 空间是由前苏联数学家 ALEXANDROV 在 1937 年首次提出的,是指开集族对任意并和任意交都封闭的拓扑空间,其最初的名称有离散空间(Diskrete Räume,不同于现在的离散空间)、有限生成空间(finitely generated space)、主空间(principal space)等,JOHNSTONE 在文献[1]中首次称这类空间为

收稿日期:2016-12-12;修回日期:2017-03-08;责任编辑:张　军

基金项目:国家自然科学基金(11201112);中央高校基本科研业务专项资金项目(2017JC09);河北省高等学校科学技术研究项目重点项目(ZD2016047)

第一作者简介:张山山(1992—),女,河北唐山人,硕士,主要从事拓扑学与格论方面的研究。

通信作者:李　扉副教授。E-mail: feifei_1004@bjfu.edu.cn;姚　卫教授。E-mail: yaowei0516@163.com

张山山,李　扉,姚　卫. Alexandrov 空间的公理体系[J]. 河北科技大学学报,2017,38(4):352-359.

ZHANG Shanshan, LI Fei, YAO Wei. Axiomatic systems of Alexandrov spaces[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2017,38(4):352-359.

Alexandrov空间。可能因为这种拓扑过于简单，同时也和度量拓扑不相符。在随后的 30 年里，Alexandrov 空间并没有多少人去研究。20 世纪 70 年代前关于这方面的学术论文只有 1966 年的 2 篇文献[2-3]；20 世纪 70－80 年代仍然没有多少专门研究 Alexandrov 空间的文章[1,4-5]；20 世纪 90 年代后，Alexandrov 空间在数字拓扑领域得到了广泛的应用[6-7]，这是因为 Alexandrov 空间和数字拓扑中的有限拓扑空间有很多相似的性质，这个观点在文献[2—3]中也有体现，比如 Alexandrov 空间范畴是有限拓扑空间范畴的反射壳[5]。文献[8]以数字拓扑的角度从基、分离性、连通性、函数空间、拟一致结构等方面对 Alexandrov 的空间进行了系统论述和研究。进入 21 世纪后，对 Alexandrov 空间的研究主要集中在以下几方面。1）在粗糙集理论中，这是因为 Pawlak 粗糙集对应的拓扑空间恰是 Alexandrov 空间，并且等价关系和满足对称分离性的 Alexandrov空间之间具有一一对应关系[9-11]；2）在模糊拓扑学中，模糊形式的 Alexandrov 拓扑得到了研究[12-15]；3）在数字拓扑学中，Alexandrov 空间继续被推广为局部有限空间（每个点只有有限个开邻域）[16-18]，这种局部有限性可以很好地描述数字拓扑的局部特征。

1　Alexandrov 空间中的开集和闭集，邻域与邻域系统

定义 1　设 X 是一个集合，T 是 X 的一个子集族。如果 T 满足如下条件：

AT_1）$X,\varnothing\in T$；

AT_2）若$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq T$，则$\bigcap_i A_i\in T$；

AT_3）若$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq T$，则$\bigcup_i A_i\in T$，

则称 T 是 X 的一个 Alexandrov 拓扑，称偶对(X,T)是一个 Alexandrov 空间。

显然，每一个具有有限个开集的拓扑空间是一个 Alexandrov 空间，每一个建立在有限集上的拓扑空间是一个 Alexandrov 空间。另外，Alexandrov 空间的闭集族也满足公理条件（$AT_1－AT_3$）。

定义 2　设 X 是一个非空集合，如果每一个 $x\in X$ 都对应 X 的一个子集族 U_x 并满足：

N_1）对于任何 $x\in X,U_x\neq\varnothing$；并且如果 $U\in U_x$，则 $x\in U$；

N_2）如果 $U,V\in U_x$，则 $U\cap V\in U_x$；

N_3）如果 $U\in U_x$，并且 $U\subseteq V$，则 $V\in U_x$；

N_4）如果 $U\in U_x$，则存在 $V\in U_x$ 满足条件：

i)$U\subseteq V$ 和 ii)对于任何 $y\in V$，有 $V\in U_y$，那么集族 $U=\{U_x\mid x\in X\}$称为 X 上的一个拓扑邻域系统，偶对(X,U)称为一个拓扑邻域空间。

拓扑空间和拓扑邻域空间可以相互刻画。对于非空集合 X 上的一个拓扑 T，则 $U_T=\{U_x\mid x\in X\}$是 X 上的一个拓扑邻域系统；反过来，对于非空集合 X 上的一个拓扑邻域系统 $U=\{U_x\mid x\in X\}$，则 $T_U=\{A\subseteq X\mid\forall x\in A,A\in U_x\}$是 X 上的一个拓扑；且有 $T_{U_T}=T$ 和 $U_{T_U}=U$[19]；或者用范畴论的语言来说，拓扑空间范畴 **Top** 和拓扑邻域空间范畴 **TNgh** 同构，其中 **TNgh** 中的态射：称 $f:(X,U^X)\to(Y,U^Y)$是拓扑邻域空间之间的连续映射，如果对于任意的 $x\in X,B\subseteq Y,B\in U^Y_{f(x)}$ 蕴含 $f^{-1}(B)\in U^X_x$。

定义 3　设 $U=\{U_x\mid x\in X\}$是集合 X 上的一个拓扑邻域系统，如果有：

TN）对于任意的 $x\in X$，如果$\{U_i\mid i\in I\}\subseteq U_x$，则$\bigcap_i U_i\in U_x$，那么映射 U 称为 X 上的一个 Alexandrov 拓扑邻域系统。

定理 1　设 T 是集合 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，U 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑邻域系统，则有：

1）U_T 是 X 上的 Alexandrov 拓扑邻域系统；

2）T_U 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑。

证明　1)设$\{U_i\mid i\in I\}\subseteq U_x$，则存在开集族$\{V_i\mid i\in I\}$使得对于每一个 $i\in I$ 都有 $x\in V_i\subseteq U_i$，从而 $x\in\bigcap_i V_i\subseteq\bigcap_i U_i$。由$\bigcap_i V_i$ 是一个开集知，$\bigcap_i U_i\in U_x$。

2)只需验证 T_U 对任意交封闭。设$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq T_U$，任取 $x\in\bigcap_i A_i$，则对于任意的 $i\in I$ 都有 $x\in A_i$，从而 $A_i\in U_x$，进而$\bigcap_i A_i\in U_x$。

注 1 令 **ATNgh** 为由 Alexandrov 拓扑邻域空间构成的 **TNgh** 的满子范畴，则由定理 1 知，**ATNgh** 与 **ATop**同构。

2 Alexandrov 算子

2.1 Alexandrov 闭包算子

点集拓扑学中的闭包算子是 1922 年 KURATOWSKI 在文献[20]中首次引入的。

定义 4 设 X 是一个非空集合，如果映射 $Cl:2^X\to 2^X$ 满足：

C_1)$Cl(\varnothing)=\varnothing$；

C_2)对于任意的 $A\subseteq X$,有 $A\subseteq Cl(A)$；

C_3)对于任意的 $A,B\subseteq X$,有 $Cl(A\cup B)=Cl(A)\cup Cl(B)$；

C_4)对于任意的 $A\subseteq X$,有 $Cl(Cl(A))=Cl(A)$，

那么称 Cl 为 X 上的一个(Kuratowski)闭包算子,称偶对(X,Cl)为一个闭包算子空间。

对于非空集合 X 上的一个拓扑 X，令 $Cl_T:2^X\to 2^X$ 为

$$Cl_T(A)=\{x\in X\mid \forall U\in U_x,U\cap A\neq\varnothing\}(\forall A\subseteq X),$$

则 Cl_T 是 X 上的一个闭包算子；反过来，对于非空集合 X 上的一个闭包算子 Cl，

$$T_{Cl}=\{A\subseteq X\mid Cl(A')=A'\}$$

是 X 上的一个拓扑;而且有 $T_{Cl_T}=T$ 和 $Cl_{T_{Cl}}=Cl$[19]。拓扑空间和闭包算子的这种等价性，如果用范畴论的语言来描述，那就是拓扑空间范畴 **Top** 和闭包算子空间范畴 **Cl** 同构,其中 **Cl** 中的态射:称 $f:(X,Cl_X)\to(Y,Cl_Y)$是闭包算子空间之间的连续映射，如果对于任意的 $A\subseteq X$,有 $f(Cl_X(A))\subseteq Cl_Y(f(A))$。

定义 5 设 X 是一个非空集合,$Cl:2^X\to 2^X$ 是一个闭包算子，如果

CA)对于任意的$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$,有 $Cl(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i Cl(A_i)$，那么映射 Cl 称为 X 上的一个 Alexandrov 闭包算子。

定理 2 设 X 是一个非空集合，则

1) 若 T 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，则 Cl_T 是 X 上的 Alexandrov 闭包算子；

2) 若 $Cl:2^X\to 2^X$ 是一个 Alexandrov 闭包算子,T_{Cl}是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑。

证明 1)只需证对于任意的集族$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$ 都有 $Cl_T(\bigcup_i A_i)\subseteq\bigcup_i Cl_T(A_i)$。事实上,由于每一个 $Cl_T(A_i)$都是闭集,则$\bigcup_i Cl_T(A_i)$是包含$\bigcup_i A_i$ 的一个闭集,由闭包算子的定义知,$Cl_T(\bigcup_i A_i)\subseteq\bigcup_i Cl_T(A_i)$。

2)设$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq T_{Cl}$，则

$$Cl((\bigcap_i A_i)')=Cl(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i Cl(A_i)=\bigcup_i A_i=(\bigcap_i A_i)',$$

从而$\bigcap_i A_i\in T_{Cl}$。这说明 T_{Cl}对任意交封闭。因此,T_{Cl}是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑。

注 2 令 **ACl** 为由 Alexandrov 闭包算子空间构成的 **Cl** 的满子范畴，则由定理 **2** 知，**ACl** 与 **ATop** 同构。

2.2 Alexandrov 内部算子

内部算子是闭包算子的对偶形式，同样拓扑空间和内部算子也可以相互唯一确定。

定义 6 设 X 是一个非空集合，如果映射 $Int:2^X\to 2^X$ 满足：

I_1)$Int(X)=X$；

I_2)对于任意的 $A\subseteq X$,有 $Int(A)\subseteq A$；

I_3)对于任意的 $A,B\subseteq X$,有 $Int(A\cap B)=Int(A)\cap Int(B)$；

I_4)对于任意的 $A\subseteq X$,有 $Int(Int(A))=Int(A)$，

那么称 Int 为 X 上的一个内部算子,称偶对(X,Int)为一个内部算子空间。

对于非空集合 X 上的一个拓扑 T,令 $Int_T:2^X\to 2^X$ 为

$$Int_T(A)=\bigcup\{B\in T\mid B\subseteq A\}(\forall A\subseteq X),$$

则 Int_T 是 X 上的一个内部算子；反过来，对于非空集合 X 上的一个内部算子 Int，

$$T_{Int}=\{A\subseteq X\mid Int(A)=A\}$$

是 X 上的一个拓扑；而且有 $T_{Int_T}=T$ 和 $Int_{T_{Int}}=Int$[19]。拓扑空间和闭包算子的这种等价性，如果换

成范畴论的语言来描述，那就是拓扑空间范畴 **Top** 和内部算子空间范畴 **Int** 同构，其中 **Int** 中的态射：称 $f:(X,Int_X)\to(Y,Int_Y)$ 是内部算子空间之间的连续映射，如果对于任意的 $B\subseteq Y$，都有 $f^{-1}(Int_Y(B))\subseteq Int_X(f^{-1}(B))$。

定义 7　设 $Int:2^X\to 2^X$ 是集合 X 的一个内部算子，如果有：

IA）对于任意的$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$，$Int(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i Int(A_i)$，那么称 Int 为 X 上的一个 Alexandrov 内部算子。

定理 3　设 X 是一个非空集合，则：

1）若 T 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，则 Int_T 是 X 上的 Alexandrov 内部算子；

2）若 $Int:2^X\to 2^X$ 是一个 Alexandrov 内部算子，则 T_{Int} 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑。

证明　1）只需证对于任意的集族$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$ 都有 $Int_T(\bigcap_i A_i)\supseteq\bigcap_i Int_T(A_i)$。事实上，由于每一个 $Int_T(A_i)$ 都是开集，则 $\bigcap_i Int_T(A_i)$ 是包含于 $\bigcap_i A_i$ 的开集。由内部算子的定义可知，$Int_T(\bigcap_i A_i)\supseteq\bigcap_i Int_T(A_i)$。

2）设$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq T_{Int}$，则 $Int(\bigcap_i A_i)=\bigcap_i Int(A_i)=\bigcap_i A_i$，从而$\bigcap_i A_i\in T_{Int}$。这说明 T_{Int} 对任意交封闭。因此，T_{Int} 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑。

注 3　令 **AInt** 为由 Alexandrov 内部算子空间构成的 **Int** 的满子范畴，则由定理 3 知，**AInt** 与 **ATop** 同构。

2.3　Alexandrov 导算子

定义 8　设 X 是一个非空集合，如果映射 $d:2^X\to 2^X$ 满足：

D_1）$d(\varnothing)=\varnothing$；

D_2）对于任意的 $x\in X$，有 $x\notin d(\{x\})$；

D_3）对于任意 $A\subseteq X$，有 $d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$；

D_4）对于任意 $A\subseteq X$，有 $d(d(A))\subseteq A\cup d(A)$，

则称 d 为 X 上的一个导算子，称偶对(X,d)为一个导算子空间。

在其他条件成立的前提下，D_2）还可以写成

D_2'）对于任意 $x\in X$，$A\subseteq X$，有 $x\in d(A)$ 当且仅当 $x\in d(A-\{x\})$。

对于集合 X 上的一个导算子 d，集族

$$T_d=\{A\subseteq X\mid d(A')\cap A=\varnothing\}=\{A\subseteq X\mid d(A')\subseteq A'\}$$

是 X 上的一个拓扑；对于 X 上的一个拓扑 T，定义 $d_T:2^X\to 2^X$ 为

$$d_T(A)=\{x\in X\mid \forall U\in U_x, U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing\}(\forall A\subseteq X),$$

则 d_T 是 X 上的一个导算子；并且有 $d_{T_d}=d$ 和 $T_{d_T}=T$。拓扑空间和导算子的这种等价性，如果换成范畴论的语言来描述，那就是拓扑空间范畴 **Top** 和导算子空间范畴 **Dr** 同构，其中 **Dr** 中的态射：称 $f:(X,d_X)\to(Y,d_Y)$是导算子空间之间的连续映射，如果对于任意的 $A\subseteq X$，都有 $f(d_X(A))\subseteq f(A)\cup d_Y(f(A))$。

定义 9　设 $d:2^X\to 2^X$ 是集合 X 的一个导算子，如果有：

DA）对于任意的$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$，$d(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i d(A_i)$，那么映射 d 称为上的一个 Alexandrov 导算子。

定理 4　设 T 是集合 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，$d:2^X\to 2^X$ 是一个 Alexandrov 导算子，则

1）d_T 是 X 上的 Alexandrov 内部算子；

2）T_d 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑。

证明　1）只需证对于任意的集族$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$ 都有 $d_T(\bigcup_i A_i)\subseteq\bigcup_i d_T(A_i)$。事实上，首先有 $x\in d_T(A)$ 当且仅当 $V(x)\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$。如果 $x\in d_T(\bigcup_i A_i)$，则

$$\bigcup_i[V(x)\cap(A_i-\{x\})]=V(x)\cap(\bigcup_i A_i-\{x\})\neq\varnothing,$$

于是存在 $i_0\in I$ 使得 $V(x)\cap(A_{i_0}-\{x\})\neq\varnothing$，即 $x\in d_T(A_{i_0})$，故 $x\in\bigcup_i d_T(A_i)$。

2）设$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq T_d$，则

$$d((\bigcap_i A_i)')=d(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i d(A_i)\subseteq\bigcup_i A_i=(\bigcap_i A_i)',$$

从而$\bigcap_i A_i\in T_d$。这说明 T_d 对任意交封闭，因此 T_d 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑。

注 4 令 **ADr** 为由 Alexandrov 导算子空间构成的 **Dr** 的满子范畴，则由定理 4 知，**ADr** 与 **ATop** 同构。

2.4 其他衍生的 Alexandrov 算子

2.4.1 Alexandrov 外部算子

拓扑空间的外部算子是由闭包算子衍生出来的一个算子。

定义 10 设 X 是一个非空集合，$e:2^X\to 2^X$ 是一个映射，如果

E_1)$e(\varnothing)=X$；

E_2)对于任意 $A\subseteq X$，有 $e(A)\subseteq A'$；

E_3)对于任意 $A\subseteq B\subseteq X$，有 $e(A\cup B)=e(A)\cap e(B)$；

E_4)对于任意 $A\subseteq X$，有 $e((e(A))')=e(A)$，

则称 e 为 X 上的一个外部算子。如果外部算子 e 还满足：

EA)对于任意$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$，有 $e(\bigcup_i A_i)=\bigcup_i e(A_i)$，

则称 e 为 X 上的一个 Alexandrov 外部算子。

注 5 1) 拓扑空间和外部算子可以相互唯一确定。设(X,T)是一个拓扑空间，则外部算子 $e_T:2^X\to 2^X$ 定义为

$$e_T(A)=\bigcup\{U\in T\mid U\cap A=\varnothing\}=(Cl_T(A))'；$$

反过来，对于集合 X 上的一个外部算子 e，$T_e=\{A\subseteq X\mid e(A')=A\}$是 X 上的一个拓扑；而且有 $e_{T_e}=e$ 和$T_{e_T}=T$。

2) Alexandrov 空间和 Alexandrov 外部算子可以相互唯一确定，即如果 $e:2^X\to 2^X$ 是一个 Alexandrov 外部算子，则 T_e 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，如果 T 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，则 e_T 是 X 上的一个 Alexandrov 外部算子。

3) 外部算子空间构成的范畴 **Ext** 和拓扑空间范畴 **Top** 同构；Alexandrov 外部算子空间构成的 **Ext** 的满子范畴 **AExt** 和 Alexandrov 空间范畴 **ATop** 同构，这里称 $f:(X,e_X)\to(Y,e_Y)$是外部算子空间之间的连续映射，如果对于任意的 $B\subseteq Y$，都有 $f^{-1}(e_Y(B))\subseteq e_X(f^{-1}(B))$。

2.4.2 Alexandrov 边界算子

拓扑空间的边界算子是由闭包算子或内部算子衍生出来的一个算子。设(X,T)是一个拓扑空间，则外部算子 $b_T:2^X\to 2^X$ 定义为 $b_T(A)=Cl_T(A)\cap Cl_T(A')=(Int_T(A)\cup Int_T(A'))'$。

定义 11 设 X 是一个非空集合，$b:2^X\to 2^X$ 是一个映射，如果

B_1)$b(X)=b(\varnothing)=\varnothing$；

B_2)对于任意 $A\subseteq X$，有 $b(A)=b(A')$；

B_3)对于任意 $A\subseteq X$，有 $b(b(A))\subseteq b(A)$；

B_4)对于任意 $A,B\subseteq X$，有 $A\cap B\cap b(A\cap B)=A\cap B\cap(b(A)\cup b(B))$。

则称 b 为 X 上的一个边界算子。如果边界算子 b 还满足：

BA)对于任意$\{A_i\mid i\in I\}\subseteq 2^X$，有$(\bigcap_i A_i)\cap b(\bigcap_i A_i)=(\bigcap_i A_i)\cap(\bigcup_i b(A_i))$。

则称 b 为 X 上的一个 Alexandrov 边界算子。

注 6 1)拓扑空间和边界算子可以相互唯一确定。设(X,T)是一个拓扑空间，则外部算子 $b_T:2^X\to 2^X$ 定义为

$$b_T(A)=Cl_T(A)\cap Cl_T(A')=(Int_T(A)\cup Int_T(A'))'；$$

反过来，对于集合 X 上的一个边界算子 b，$T_b=\{A\subseteq X\mid b(A')\cap A=\varnothing\}$是 X 上的一个拓扑；而且有 $b_{T_b}=b$ 和 $T_{b_T}=T$。

2) Alexandrov 空间和 Alexandrov 边界算子可以相互唯一确定，即如果 $b:2^X\to 2^X$ 是一个 Alexandrov 边界算子，则 T_b 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，如果 T 是 X 上的一个 Alexandrov 拓扑，则 b_T 是 X 上的一个 Alexandrov 边界算子。

3) 边界算子空间构成的范畴 **Bnd** 和拓扑空间范畴 **Top** 同构；Alexandrov 边界算子空间构成的 **Bnd** 的满子范畴 **ABnd** 和 Alexandrov 空间范畴 **ATop** 同构，这里称 $f:(X,b_X)\to(Y,b_Y)$是边界算子空间之间的连续映射，如果对于任意的 $A\subseteq X$，都有 $f(b_X(A))\subseteq f(A)\cup b_Y(f(A))$。

3　Alexandrov 空间的格序特征

3.1　Alexandrov 空间与偏序集

通常用拓扑空间的特殊化序和预序集上的上(下)集建立拓扑空间和二元关系之间的联系。1966 年，MCCORD[2] 和 STEINER[3] 分别独立地发现了偏序集范畴和 T_0 拓扑空间范畴之间的范畴同构。

设(X,T)是一个拓扑空间，定义 X 上的二元关系$\leqslant_T$ 为

$$x\leqslant_T y\Leftrightarrow U_x\subseteq U_y$$

则$\leqslant_T$ 是 X 上的一个预序，并且(X,T)是一个 T_0 空间当且仅当$\leqslant_T$ 是 X 上的一个偏序。

反过来，设$(X,\leqslant)$是一个预序集，令 $\gamma(X)$为 X 的所有上集构成的集合，则$(X,\gamma(X))$是一个的 Alexandrov 空间，并且$(X,\leqslant)$是一个偏序集当且仅当$(X,\gamma(X))$是一个 T_0 的 Alexandrov 空间。

于是 **ATop** 同构于预序集范畴 **POrd**[5,21]，T_0 的Alexandrov空间范畴 **ATop**$_0$ 同构于偏序集范畴 **POS**[2-3]。

3.2　Alexandrov 空间的无点化刻画

对于每个拓扑空间(X,T)，偶对$(T,\subseteq)$是一个空间式 Frame，即由素元交生成的完备格(可以证明由素元交生成的完备格自然就是一个 Frame)；反过来，对于每个完备格，则其全体素元构成的集合带上谱拓扑是一个 Sober 空间。由此可以得到 Sober 空间范畴和空间式 Frame 范畴之间的对偶等价[1]。对于 Alexandrov空间，BONSANGUE 等[22]通过引入 Observation Frame 建立了 T_0 的 Alexandrov 空间的对偶形式为完备素元交生成的完备格。

对于 Frame，所有素元、所有从该 Frame 到二元格的 Frame 同态和所有完备素滤子这三者之间存在一一对应关系，因此可以分别在 3 个集合上建立相应的拓扑，最后都能得到对偶等价的结论。为此在文献[23]中，姚卫和韩相彦利用完备素元交生成格的自对偶性以及这种格上的所有素元、所有余素元和所有到二元格的完备格同态之间的一一对应，以完备格同态为基础建立了 T_0 的 Alexandrov 空间的对偶形式及其模糊形式。

本节的目的是以余素元为基础重现 T_0 的 Alexandrov 空间的对偶形式，利用余素元使得这种对偶更加直观和简洁。

定义 12　设 L 是一个完备格，$b\in L$ 称为完备余素元，如果 $b\leqslant\bigvee S$ 可推出存在 $s\in S$ 使得 $b\leqslant s$。记 $c(L)$为 L 的全体完备余素元之集(注意 $c(L)$有可能为空集，如单位区间)。如果对于任意的 $a\in L$，都有 $a=\bigvee\{b\in c(L)\mid b\leqslant a\}$，则称 L 为一个完备余素元生成格，简称完全生成格。令 **CGLat** 为由完全生成格及其完备格同态构成的范畴。

从定义可以看出，每一个完全生成格都是一个完全分配格，因为沿仿照 Domain 理论[24-25]中的术语，完备余素元实际上是相对于三角小于关系的紧元，从而完全生成格之于完全分配格类似于代数格之于连续格。

定理 5　设(X,T)是一个 Alexandrov 空间，则 $c(T)=\{V(x)\mid x\in X\}$。

证明　设 $U\in c(T)$，则 $U=\bigcup_{x\in U}V(x)$，于是存在 $x_0\in U$ 使得 $U=V(x)$；反过来，设 $V(x)\subseteq\bigcup_i U_i$，则存在 $i_0\in I$ 使得 $x\in U_{i_0}$。由 $V(x)$的最小性知，$V(x)\subseteq U_{i_0}$。故 $V(x)\in c(T)$。

定理 6　每一个 Alexandrov 空间的开集格都是一个完全生成格。

证明　对于任意开集 U 都有 $U=\bigcup_{x\in U}V(x)$，于是该定理是定理 5 的直接推论。

定理 7　设 $f:(X,T)\rightarrow(Y,S)$是 Alexandrov 空间之间的连续映射，则 $f^{-1}:S\rightarrow T$ 是一个完备格同态。

该定理证明是直接的，这是因为(X,T)和(Y,S)对任意交和任意并都封闭，而 $f^{-1}:2^Y\rightarrow 2^X$ 恰好保任意交和任意并。

这样，可以得到一个函子 V：**ATop**$_0\rightarrow$**CGLat**^{op}，$V(X,T)=(T,\subseteq)$，$V(f)=(f^{-1})^{op}$。

定理 8　设 A 是一个完备格，则 $c(A)$是一个偏序集，赋予下拓扑 $\gamma(c(A))$成为 T_0 的 Alexandrov 空间。

该定理不需要证明，因为每个偏序集上的下拓扑都是一个 T_0 的 Alexandrov 空间。

定理 9　设 $g:A\rightarrow B$ 是完备格同态，定义 $G(g):c(B)\rightarrow c(A)$为 $G(g)(b)=g_*(b)$，其中 g_*是 g 的左伴随(定义见文献[24])，则 $G(g):c(B)\rightarrow c(A)$是一个连续映射。

证明 只需证明 $G(g)$ 是一个定义好的映射，其连续性可由保序性(而这是显然的)直接推得。设 $b\in c(B)$ 且 $g_*(b)\leqslant\bigvee_i a_i$，则 $b\leqslant g(\bigvee_i a_i)=\bigvee_i g(a_i)$，从而存在 $i_0\in I$ 使得 $b\leqslant g(a_{i_0})$，这等价于 $g_*(b)\leqslant a_{i_0}$，故$G(g)$是一个定义好的映射。

这样，得到了另一个函子 $\boldsymbol{G}$:**CGLat**$^{op}\to$**ATop**$_0$，具体为 $\boldsymbol{G}(A)=(c(A),\gamma(c(A)))$，$\boldsymbol{G}(g)=g_*$。

定理 10 设(X,T)是一个 T_0 的 Alexandrov 空间，则$(c(T),\gamma(c(T)))$同胚于(X,T)。

证明 易见，$V:X\to c(T)(x\mapsto V(x))$定义了一个一一映射(其中单射性用到$(X,T)$的 T_0 分离性)。

首先，$\boldsymbol{V}$ 是一个开映射，即若 $U\in T$，则 $V(U)=\{V(x)\mid x\in U\}$ 是 $c(T)$ 的一个下集。实际上，如果 $V(y)\subseteq V(x)$ 且 $x\in U$，则 $U_x\subseteq U_y$，于是 $U\in U_y$，$y\in U$。故 $V(y)\in V(U)$，$V(U)$是 $c(T)$的一个下集。

其次，V 是一个连续映射，即若 W 是 $c(T)$的下集，则 $V^{-1}(W)=\{x\in X\mid V(x)\in W\}\in T$。实际上，若 $x\in V^{-1}(W)$，则 $V(x)\in W$。任取 $y\in V(x)$，有 $V(y)\subseteq V(x)$。由 W 是下集知，$V(y)\in W$，即 $y\in V^{-1}(W)$，从而 $V(x)\subseteq V^{-1}(W)$或者 $V^{-1}(W)\in U_x$。故 $V^{-1}(W)\in T$。

因此，$(c(T),\gamma(c(T)))$同胚于(X,T)。

定理 11 设 A 是一个完全生成格，则 A 与 $\gamma(c(A))$完备格同构。

证明 对于任意的 $a\in A$，令 $\Phi(a)=\downarrow a\cap c(A)$，则 $\Phi:A\to\gamma(c(A))$是一个映射，且由 A 是完全生成格知，Φ 是一个单射。

首先，Φ 是满射。设 W 是 $c(A)$中的下集，令 $a=\bigvee W$，则 $W\subseteq\downarrow a\cap c(A)=\Phi(a)$；另外对于任意的$b\in\Phi(a)$，有 $b\in c(A)$且 $b\leqslant\bigvee W$，从而存在 $w\in W$ 使得 $b\leqslant w$，由 W 是下集知 $b\in W$，故 $\Phi(a)\subseteq W$。故 $W=\Phi(a)$。

其次，Φ 是完备格同态。实际上，$\Phi(0)=\downarrow 0\cap c(A)=\varnothing$，$\Phi(1)=\downarrow 1\cap c(A)=c(A)$；对于任意的 $\{a_i\mid i\in I\}\subseteq A$，有：

$$\Phi(\bigwedge_i a_i)=\downarrow(\bigwedge_i a_i)\cap c(A)=(\bigcap_i\downarrow a_i)\cap c(A)=\bigcap_i(\downarrow a_i\cap c(A))=\bigcap_i\Phi(a_i),$$

$$\Phi(\bigvee_i a_i)=\downarrow(\bigvee_i a_i)\cap c(A)=(\bigcup_i\downarrow a_i)\cap c(A)=\bigcup_i(\downarrow a_i\cap c(A))=\bigcup_i\Phi(a_i),$$

因此，A 与 $\gamma(c(A))$完备格同构。

定理 12 **ATop$_0$** 对偶等价于 **CGLat**。

3.3 偏序集范畴与完全生成格范畴的对偶等价

由于 **ATop**$_0$ 与 **POS** 同构、与 **CGLat** 对偶等价，因此 **POS** 与 **CGLat** 对偶等价，具体对应关系为偏序集的所有下集构成的集族在包含序下是一个完全生成格，完全生成格的所有完备余素元之集是一个偏序集。这种对应关系类似于 Domain 理论中的偏序集范畴与代数 Domain 范畴之间的关系(其中偏序集的理想和代数Domain的 way-below 紧元是纽带)。

参考文献/References:

[1] JOHNSTONE P T. Stone Spaces[M]. New York: Cambridge University Press. 1986.

[2] MCCORD M C. Singular homology and homotopy groups of finite topological spaces[J]. Duke Mathematical Journal, 1966, 33(3):465-474.

[3] STEINER A K. The lattice of topologies: Structure and complementation[J]. Transactions of the American Mathematical Socity, 1966, 122(2): 379-398.

[4] HERRLICH H, STRECKER G E. Coreflective subcategories in general topology[J]. Fundamenta Mathematicae, 1972, 73(73): 199-218.

[5] HOFFMANN R E. Reflective hulls of finite topological spaces[J]. Archiv der Mathematik, 1979, 33(1):258-262.

[6] HERMAN G T. On topology as applied to image analysis[J]. Computer Vision Graphics & Image Processing, 1990, 52(3):409-415.

[7] KRONHEIMER E H. The topology of digital images[J]. Topology & Its Applications, 1992, 46(3):279-303.

[8] ARENAS F G. Alexandrov spaces[J]. Acta Math Univ Comenianae, 1999, 68(1): 17-25.

[9] HAO Jing, LI Qingguo. The relationship between L-fuzzy rough set and L-topology[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2011, 178(1):74-83.

[10] LI Zhaowen, XIE Tusheng, LI Qingguo. Topological structure of generalized rough sets[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 63(6):1066-1071.

[11] PEI Zhi, PEI Daowu, ZHENG Li. Topology vs generalized rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(2):231-239.

[12] CHEN Piwei, ZHANG Dexue. Alexandrov L-co-topological spaces[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2010, 161(18):2505-2514.
[13] FANG Jinming. I-fuzzy Alexandrov topologies and specialization orders[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2007, 158(1):2359-2374.
[14] FANG Jinming, QIU Yue. Fuzzy orders and fuzzifying topologies[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2008, 48(1):98-109.
[15] LAI Hongliang, ZHANG Dexue. Fuzzy preorder and fuzzy topology[J]. Fuzzy Sets & Systems, 2006, 157(14):1865-1885.
[16] KOVALEVSKY V. Axiomatic digital topology[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, 26(1/2):41-58.
[17] KOVALEVSKY V A. ANNOUNCEMENT: Geometry of locally finite spaces[J]. International Journal of Shape Modeling, 2008, 14(2): 231-232.
[18] HAN S E. Extension of continuity of maps between axiomatic locally finite spaces[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2011, 88: 2889-2900.
[19] 熊金成. 点集拓扑讲义[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2011.
[20] KURATOWSKI K. Sur l'operation A de l'analysis Situs[J]. Fundamenta Mathematicae, 1922, 3:182-199.
[21] NATURMAN C A. Interior Algebras and Topology[D]. Capetown: University of Cape Town, 1990.
[22] BONSANGUE M M, JACOBS B, KOK J N. Duality beyond sober spaces: Topological spaces and observation frames[J]. Theoretical Computer Science, 1995, 151(1):79-124.
[23] YAO Wei, HAN S E. A Stone-type duality for sT_0 stratified Alexandrov L-topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 282:1-20.
[24] DAVEY B A, PRIESTLEY H A. Introduction to Lattices and Order[M]. New York: Cambridge University Press, 2002.
[25] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMEL K, et al. A Compendium of continuous lattices[J]. Springer-Verlag, 1980, 29(3): 189-224.

向本期载文的审稿专家致谢

本期《河北科技大学学报》共发表论文 13 篇。这些论文的发表是与有关专家的认真审读、细查资料、推敲分析、中肯评价分不开的。对此，本编辑部特向这些专家表示敬意，对他们的辛勤劳动表示感谢。本期载文的审稿专家名单如下(按姓名的汉语拼音顺序排列)：

杜赵群　段鸿杰　弓爱君　何召兰　胡昌勤　胡业新　贾寿华　江卫华
李常品　李海洋　刘建芳　刘旺玉　马崇启　马希直　毛维杰　皮大伟
全齐全　史福贵　孙　坤　王立新　杨　易　赵冬梅　赵晓朋　赵延治
郑光文　郑宏宇　郑天龙

（本刊编辑部）