第38卷第4期 河 北 科 技 大 学 学 报 Vol.38,No.4
2017年8月 Journal of Hebei University of Science and Technology Aug. 2017

文章编号:1008-1542(2017)04-0341-11 **doi:10.7535/hbkd.2017yx04005**

具有 p-Laplacian 算子的共振微分方程组解的存在性

江卫华,周彩莲,李庆敏

(河北科技大学理学院,河北石家庄 050018)

摘 要:为了研究具有非线性分数阶微分算子的微分方程共振边值问题解的存在性,引入了推广的 Mawhin 连续定理,通过定义合适的 Banach 空间及范数,给出恰当的算子,运用 Mawhin 连续定理的拓展,研究了具有 p-Laplacian 算子的分数阶共振微分方程组边值问题解的存在性。通过举例验证了所得结论的正确性。所得结论是共振边值问题现有成果的推广和一般化,对进一步研究具有一定参考价值。

关键词:常微分方程;边值问题;共振;Mawhin 连续定理的拓展;p-Laplacian 算子

中图分类号:O175.8 **MSC(2010)主题分类:**34B05 **文献标志码:**A

Existence of solutions for differential equations systems with p-Laplacian at resonance

JIANG Weihua, ZHOU Cailian, LI Qingmin

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: In order to study the existence of solutions for boundary value problems at resonance with nonlinear fractional differential operator, a generalization of Mawhin's continuous theorem is introduced. By defining suitable Banach space and norm, constructing the proper operators and using the extension of Mawhin continuation theorem, the existence of solutions for fractional differential equations systems boundary value problem with p-Laplacian at resonance is studied. An example is given to illustrate the main results. The results are the improvement and generalization of some existing results of boundary value problems at resonance.

Keywords: ordinary differential equation; boundary value problem; resonance; the extension of Mawhin's continuation theorem; p-Laplacian operator

1 问题提出

微分方程边值问题广泛应用于物理学、机械学、化学、能量学等领域中。所谓微分方程共振边值问题是指其相应的齐次边值问题具有非零解。对共振微分方程解的存在性研究已有许多的成果[1-16],分数阶微分方程边值问题得到了许多学者的广泛关注[17-22],但对带 p-Laplacian 算子的共振分数阶微分方程组边值问题

收稿日期:2016-10-01;修回日期:2017-05-10;责任编辑:张 军

基金项目:河北省自然科学基金(A2013208108)

第一作者简介:江卫华(1964—),女,河北邯郸人,教授,博士,主要从事应用泛函分析、常微分方程边值问题方面的研究。

E-mail:jianghua64@163.com

江卫华,周彩莲,李庆敏.具有 p-Laplacian 算子的共振微分方程组解的存在性[J].河北科技大学学报,2017,38(4):341-351.

JIANG Weihua, ZHOU Cailian, LI Qingmin. Existence of solutions for differential equations systems with p-Laplacian at resonance[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology,2017,38(4):341-351.

解的存在性的研究成果相对较少。文献[20]研究了具有 p-Laplacian 算子的分数阶共振微分方程边值问题：

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha}u))(t)+f(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha}u(t))=0, \\ u(0)=D_{0^+}^{\alpha}u(0)=0, u(1)=\int_0^1 h(t)u(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

解的存在性，其中 $0<\beta\leqslant 1, 1<\alpha\leqslant 2, \int_0^1 h(t)t^{\alpha-1}\mathrm{d}t=1, \varphi_p(s)=|s|^{p-2}\cdot s, p>1, f:[0,1]\times \mathbf{R}^3\rightarrow \mathbf{R}$ 是连续的。

受上述文献启发，笔者利用 Mawhin 连续定理的拓展[24]，研究具有 p-Laplacian 算子的共振微分方程组边值问题：

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\beta_1}(\varphi_P(D_{0^+}^{\alpha_1}u))(t)+f(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t))=0, \\ D_{0^+}^{\beta_2}(\varphi_P(D_{0^+}^{\alpha_2}u))(t)+g(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t))=0, \\ u(0)=D_{0^+}^{\alpha_1}u(0)=v(0)=D_{0^+}^{\alpha_2}v(0)=0, \\ u(1)=\int_0^1 h_1(t)u(t)\mathrm{d}t, v(1)=\int_0^1 h_2(t)v(t)\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 $1<\alpha_1,\alpha_2\leqslant 2, 0<\beta_1,\beta_2\leqslant 1, \int_0^1 h_1(t)t^{\alpha_1-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 h_2(t)t^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t=1, h_1(t),h_2(t)\in L[0,1]$ 是非负函数，$\varphi_p(s)=|s|^{p-2}\cdot s, p>1, f:[0,1]\times\mathbf{R}^6\rightarrow\mathbf{R}$ 和 $g:[0,1]\times\mathbf{R}^6\rightarrow\mathbf{R}$ 是连续的。

2 预备知识

为了得到想要的结论，给出如下定义和定理。

定义 1[23] 设 X,Y 是 2 个 Banach 空间，如果连续算子 $M:X\cap \mathrm{dom}M\rightarrow Y$ 满足下面条件：

1)$\mathrm{Im}\ M:=M(X\cap\mathrm{dom}M)$ 是 Y 的闭子集，

2)$\mathrm{Ker}\ M:=\{x\in X\cap\mathrm{dom}M: Mx=0\}$ 与 $\mathbf{R}^n$ 是线性同胚的，$n<\infty$。

则称算子 M 是拟线性的，其中 $\mathrm{dom}M$ 表示 M 的定义域。

令 $X_1=\mathrm{Ker}M, P:X\rightarrow X_1$ 是投影算子，$\Omega\subset X$ 是一个有界开集，零元 $\theta\in\Omega$。

定义 2[23] 设 $N_\lambda:\bar{\Omega}\rightarrow Y$ 是连续有界算子，$\lambda\in[0,1]$，记 N_1 为 N。令 $\sum_\lambda=\{x\in\bar{\Omega}: Mx=N_\lambda x\}$。如果存在 Y 的线性子空间 Y_1，满足 $\dim Y_1=\dim X_1$，算子 $Q:Y\rightarrow Y_1$ 连续有界且满足 $Q(I-Q)=\theta$，以及算子 $R:\bar{\Omega}\times[0,1]\rightarrow X_2$ 是连续且紧的，其中 $X_1\oplus X_2=X$，使得对 $\forall\lambda\in[0,1]$ 有：

a)$\mathrm{Ker}\ Q=\mathrm{Im}\ M$，

b)$QN_\lambda x=\theta, \lambda\in(0,1)\Leftrightarrow QNx=\theta$，

c)$R(\cdot,0)$ 是零算子，$R(\cdot,\lambda)|_{\Sigma_\lambda}=(I-P)|_{\Sigma_\lambda}$，

d)$M[P+R(\cdot,\lambda)]=(I-Q)N_\lambda$，

则称 N_λ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 M-紧的。

定理 1[23] 令 X,Y 是 2 个 Banach 空间，$\Omega\subset X$ 是有界非空开集，如果 $M:X\cap\mathrm{dom}M\rightarrow Y$ 是拟线性算子，$N_\lambda:\bar{\Omega}\rightarrow Y, \lambda\in[0,1]$ 是 M-拟紧的，并且满足下面 2 个条件：

C_1)$Mx\neq N_\lambda x, \forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{dom}M, \lambda\in(0,1)$，

C_2)$\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\ M,0\}\neq 0$，

那么等式 $Mx=Nx$ 在 $\mathrm{dom}M\cap\bar{\Omega}$ 内至少存在 1 个解。其中 $N=N_1$，$J:\mathrm{Im}Q\rightarrow\mathrm{Ker}M$ 是一个同胚映射，且 $J(\theta)=\theta$。

以下是分数阶微积分的定义和性质：

定义 3[1] $f:[0,\infty)\rightarrow\mathbf{R}$ 是连续函数，f 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义为

$$I_{0^+}^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s, \quad \alpha>0。$$

定义 4[1] $f:[0,\infty)\rightarrow\mathbf{R}$ 是连续函数，则 f 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数的定义为

$$D_{0^+}^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}u(s)\mathrm{d}s,\quad n=[\alpha]+1,\quad \alpha>0。$$

引理 1[1]　$D_{0^+}^{\alpha}u(t)=0$ 当且仅当 $u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}$，其中 n 是大于等于 α 的最小整数，$c_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n$。

引理 2[1]　设 $\alpha>0$，$\lambda>-1$，则 $D_{0^+}^{\alpha}t^{\lambda}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda-\alpha+1)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^{n+\lambda-\alpha})$，其中 n 是大于等于 α 的最小整数。

引理 3[1]　设 $f\in L[0,1]$，$q\geqslant p\geqslant 0$，$q>1$，那么 $D_{0^+}^{p}I_{0^+}^{q}f(t)=I_{0^+}^{q-p}f(t)$。

引理 4[1]　如果分数阶导数 $D_{0^+}^{\alpha}f(t)$ 和 $D_{0^+}^{\alpha+m}f(t)$ 存在，那么 $(D_{0^+}^{\alpha}f(t))^{(m)}=D_{0^+}^{\alpha+m}f(t)$，其中 $\alpha>0$，m 是正整数。

在对主要问题的证明中需要用到如下不等式。

引理 5[24]　对于任意的 $u,v,w\geqslant 0$，有：

1) $\varphi_p(u+v)\leqslant\varphi_p(u)+\varphi_p(v)$，$1<p\leqslant 2$；

2) $\varphi_p(u+v)\leqslant 2^{p-2}(\varphi_p(u)+\varphi_p(v))$，$p\geqslant 2$；

3) $\varphi_p(u+v+w)\leqslant\varphi_p(u)+\varphi_p(v)+\varphi_p(w)$，$1<p\leqslant 2$；

4) $\varphi_p(u,v,w)\leqslant 2^{2p-4}\varphi_p(u)+2^{2p-4}\varphi_p(v)+2^{p-2}\varphi_p(w)$，$p\geqslant 2$，

其中 $\varphi_p(s)=|s|^{p-2}\cdot s=s^{p-1}$，$s\geqslant 0$。

3　主要结论

在本部分中，总是假设 $f:[0,1]\times\mathbf{R}^6\to\mathbf{R}$ 和 $g:[0,1]\times\mathbf{R}^6\to\mathbf{R}$ 是连续的，$h_1(t),h_2(t)\geqslant 0$，$\int_0^1h_1(t)t^{\alpha_1-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^1h_2(t)t^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t=1$，其中 $t\in[0,1]$，并且 $p,q>0$，满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

取 $X=\{(u,v)\mid D_{0^+}^{\alpha_1}u,D_{0^+}^{\alpha_2}v\in C[0,1],u(0)=D_{0^+}^{\alpha_1}u(0)=v(0)=D_{0^+}^{\alpha_2}v(0)=0\}$，定义空间 X 中范数 $\|(u,v)\|=\max\{\|u\|,\|v\|\}$，其中 $\|u\|=\max\{\|u\|_\infty,\|D_{0^+}^{\alpha_1-1}u\|_\infty,\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty\}$，$\|v\|=\max\{\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty,\|D_{0^+}^{\alpha_2-1}v\|_\infty,\|v\|_\infty\}$，$\|u\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|u(t)|$。定义 $Y=C[0,1]\times C[0,1]$，对 $\forall y=(y_1,y_2)\in Y$，范数 $\|y\|=\max\{\|y_1\|_\infty,\|y_2\|_\infty\}$，$\|y_1\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|y_1(t)|$。易知 $(X,\|\cdot\|)$，$(Y,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间。

定义算子 $M:\mathrm{dom}\,M\to Y$ 和 $N_\lambda:X\to Y$ 如下：

$$M(u,v)=(M_1u,M_2v)=(D_{0^+}^{\beta_1}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha_1}u))(t),D_{0^+}^{\beta_2}(\varphi_P(D_{0^+}^{\alpha_2}v))(t)),$$

$$N_\lambda(u,v)=(N_\lambda^{(1)}(u,v),N_\lambda^{(2)}(u,v)),\quad \lambda\in[0,1],$$

其中：

$$N_\lambda^{(1)}(u,v)=-\lambda f(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)),$$

$$N_\lambda^{(2)}(u,v)=-\lambda g(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)),$$

$$\mathrm{dom}M=\Big\{(u,v)\in X\mid D_{0^+}^{\beta_1}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha_1}u)),D_{0^+}^{\beta_2}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha_2}v))\in C[0,1],$$
$$u(1)=\int_0^1h_1(t)u(t)\mathrm{d}t,v(1)=\int_0^1h_2(t)v(t)\mathrm{d}t\Big\}。$$

引理 6　M 是拟线性算子。

证明　易知 $\mathrm{Ker}M=\{c_1t^{\alpha_1-1},c_2t^{\alpha_2-1}\}$，对任意 $(u,v)\in\mathrm{dom}M$，如果 $M(u,v)=(y_1,y_2)=y$，可得 y_1,y_2 满足：

$$\begin{cases}\int_0^1h_1(t)\int_0^t[(t-ts)^{\alpha_1-1}-(t-s)^{\alpha_1-1}]\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}y_1(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\\ \quad\int_0^1h_1(t)t^{\alpha_1-1}\int_t^1(1-s)^{\alpha_1-1}\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}y_1(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=0,\\ \int_0^1h_2(t)\int_0^t[(t-ts)^{\alpha_2-1}-(t-s)^{\alpha_2-1}]\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_2-1}y_2(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\\ \quad\int_0^1h_2(t)t^{\alpha_2-1}\int_t^1(1-s)^{\alpha_2-1}\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_2-1}y_2(r)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=0。\end{cases}\tag{2}$$

反之，若$(y_1,y_2)\in Y$满足式(2)，取

$$\begin{cases}u(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}\varphi_q\left(\dfrac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}y_1(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\alpha_1 t^{\alpha_1-1},\\ v(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha_2-1}\varphi_q\left(\dfrac{1}{\Gamma(\beta_2)}\int_0^s(s-r)^{\beta_2-1}y_2(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\alpha_2 t^{\alpha_2-1},\end{cases}$$

通过简单计算，可以得到$(u,v)\in\mathrm{dom}M$，$M(u,v)=(y_1,y_2)=y$。因此，$\mathrm{Im}\,M=\{y=(y_1,y_2)\in Y\mid y_1,y_2$满足式(2)$\}$。

根据范数$\|y_1\|_\infty$和$\|y_2\|_\infty$的定义可得M是拟线性算子。证毕。

为了证明需要的结论，定义算子$P:X\to\mathrm{Ker}M$，$Q:Y\to\mathbf{R}$如下：

$$P(u,v)=(P_1u,P_2v)=\left(\frac{D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(0)}{\Gamma(\alpha_1)}t^{\alpha_1-1},\quad\frac{D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(0)}{\Gamma(\alpha_2)}t^{\alpha_2-1}\right),$$

$$Q(y_1,y_2)=(Q_1y_1,Q_2y_2)=(a_1,a_2),$$

其中a_1,a_2满足：

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^1h_1(t)\int_0^t[(t-ts)^{\alpha_1-1}-(t-s)^{\alpha_1-1}]\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(y_1(r)-a_1)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\\ \qquad\displaystyle\int_0^1h_1(t)t^{\alpha_1-1}\int_t^1(1-s)^{\alpha_1-1}\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(y_1(r)-a_1)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=0,\\ \displaystyle\int_0^1h_2(t)\int_0^t[(t-ts)^{\alpha_2-1}-(t-s)^{\alpha_2-1}]\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_2-1}(y_2(r)-a_2)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\\ \qquad\displaystyle\int_0^1h_2(t)t^{\alpha_2-1}\int_t^1(1-s)^{\alpha_2-1}\varphi_q(\int_0^s(s-r)^{\beta_2-1}(y_2(r)-a_2)\mathrm{d}r)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=0。\end{cases}\tag{3}$$

由文献[20]中引理3.1和引理3.2易知，定义$Q_1y_1=a_1$，$Q_2y_2=a_2$有意义且$Q:Y\to\mathbf{R}^2$是连续有界算子。易知$P:X\to X_1$是投影算子，因此$X=X_1\oplus X_2$，其中$X_1=\mathrm{Im}P$，$X_2=\mathrm{Ker}P$。

定义算子$R:X\times[0,1]\to X_2$如下：

$$R(u,v,\lambda)(t)=(R_1(u,v,\lambda)(t),R_2(u,v,\lambda)(t)),$$

其中：

$$\begin{cases}R_1(u,v,\lambda)(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}\varphi_q\left(\dfrac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,\\ R_2(u,v,\lambda)(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_2)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha_2-1}\varphi_q\left(\dfrac{1}{\Gamma(\beta_2)}\int_0^s(s-r)^{\beta_2-1}(N_\lambda^{(2)}(u,v)-Q_2N_\lambda^{(2)}(u,v))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s。\end{cases}$$

引理7 算子$R:\bar{\Omega}\times[0,1]\to X_2$是连续且紧的，其中$\Omega$是$X$中的有界开子集。

证明 显然R是连续的，对于任意$(u,v)\in\bar{\Omega}$，通过f,g的连续性和Q_1,Q_2的有界性，可以得到存在常数k_1,k_2,k_3,k_4，使得$|N_\lambda^{(1)}(u,v)|\leqslant k_1$，$|Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)|\leqslant k_2$，$|N_\lambda^{(2)}(u,v)|\leqslant k_3$，$|Q_2N_\lambda^{(2)}(u,v)|\leqslant k_4$，则有：

$$\begin{cases}|R_1(u,v,\lambda)|\leqslant\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}\varphi_q\left(\dfrac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}\right),\\ |D_{0^+}^{\alpha_1-1}R_1(u,v,\lambda)|\leqslant\varphi_q\left(\dfrac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}\right),\\ |D_{0^+}^{\alpha_1}R_1(u,v,\lambda)|\leqslant\varphi_q\left(\dfrac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}\right),\end{cases}$$

$$\begin{cases}|R_2(u,v,\lambda)|\leqslant\dfrac{1}{\Gamma(\alpha_2+1)}\varphi_q\left(\dfrac{k_3+k_4}{\Gamma(\beta_2+1)}\right),\\ |D_{0^+}^{\alpha_2-1}R_2(u,v,\lambda)|\leqslant\varphi_q\left(\dfrac{k_3+k_4}{\Gamma(\beta_2+1)}\right),\\ |D_{0^+}^{\alpha_2}R_2(u,v,\lambda)|\leqslant\varphi_q\left(\dfrac{k_3+k_4}{\Gamma(\beta_2+1)}\right),\end{cases}$$

这就是说$R=(R_1,R_2)$在$\bar{\Omega}\times[0,1]$中是有界的。下面证明以下函数族等度连续。

$\{R_1(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$，$\{D_{0^+}^{\alpha_1-1}R_1(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$，

$\{R_2(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$，$\{D_{0^+}^{\alpha_2-1}R_2(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$。

不妨取 $(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]$，$t_1,t_2\in[0,1]$，$t_1<t_2$，可得：

$$\begin{aligned}&|R_1(u,v,\lambda)(t_2)-R_1(u,v,\lambda)(t_1)|=\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left|\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(r)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\right.\\&\left.\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\alpha_1-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(r)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|=\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha_1-1}-(t_1-s)^{\alpha_1-1}]\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(r)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s+\right.\\&\left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(r)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)}\left|\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\alpha_1-1}-(t_1-s)^{\alpha_1-1}]\mathrm{d}s+\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\alpha_1-1}\mathrm{d}s\right|\varphi_q\left(\frac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}\right)\leqslant\\&\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+1)}\varphi_q\left(\frac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}\right)(t_2^{\alpha_1}-t_1^{\alpha_1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|D_{0^+}^{\alpha_1-1}R_1(u,v,\lambda)(t_2)-D_{0^+}^{\alpha_1-1}R_1(u,v,\lambda)(t_1)|=\\&\left|\int_0^{t_2}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(r)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s-\right.\\&\left.\int_0^{t_1}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(r)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|=\\&\left.\int_{t_1}^{t_2}\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^s(s-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(r)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\varphi_q\left(\frac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}\right)(t_2-t_1),\end{aligned}$$

因此 $\{R_1(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 和 $\{D_{0^+}^{\alpha_1-1}R_1(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 是等度连续的。同理可得：$\{R_2(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 和 $\{D_{0^+}^{\alpha_2-1}R_2(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 也是等度连续的。

下面证明 $\{D_{0^+}^{\alpha_1}R_1(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 和 $D_{0^+}^{\alpha_2}R_2(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 的等度连续性：

$$\begin{aligned}&|D_{0^+}^{\alpha_1}R_1(u,v,\lambda)(t_2)-D_{0^+}^{\alpha_1}R_1(u,v,\lambda)(t_1)|=\\&\left|\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{t_2}(t_2-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(s)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(s))\mathrm{d}s\right)-\right.\\&\left.\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{t_1}(t_1-r)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(s)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(s))\mathrm{d}s\right)\right|,\end{aligned}\tag{4}$$

由于：

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(s)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(s))\mathrm{d}s-\right.\\&\left.\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(s)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(s))\mathrm{d}s\right|=\\&\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^{t_1}[(t_2-s)^{\beta_1-1}-(t_1-s)^{\beta_1-1}](N_\lambda^{(1)}(u,v)(s)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(s))\mathrm{d}s+\\&\left.\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(s)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&\frac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}(t_2^{\beta_1}-t_1^{\beta_1}),\end{aligned}\tag{5}$$

对于 $(u,v)\in\bar{\Omega}$，$\lambda\in[0,1]$，有：

$$\left|\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^t(t-s)^{\beta_1-1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)(s)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\frac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)},$$

由于 φ_q 在 $\left[-\dfrac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)},\dfrac{k_1+k_2}{\Gamma(\beta_1+1)}\right]$ 中是一致连续的，由式(4)和式(5)可知 $\{D_{0^+}^{\alpha_1}R_1(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in$

$\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 是等度连续的。同理可得：$\{D_{0^+}^{\alpha_2}R_2(u,v,\lambda)\mid(u,v,\lambda)\in\bar{\Omega}\times[0,1]\}$ 也是等度连续的。通过 Arzela-Ascoli 定理，可以得到算子 $R:\bar{\Omega}\times[0,1]\to X_2$ 是连续且紧的。

引理 8 设 Ω 是 X 中的有界开集，那么 N_λ 在 $\bar{\Omega}$ 中是 M- 紧的。

证明 显然，$\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}M$，$\dim\mathrm{Ker}M=\dim\mathrm{Im}Q$，$Q(I-Q)=\theta$，$\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}M$；当 $\lambda\in(0,1)$ 时，$QN_\lambda x=\theta\Leftrightarrow QNx=\theta$，因此定义 2 中的(a) 和(b) 成立。根据 R 定义可得 $R(\cdot,0)=\theta$。令$(u,v)\in\sum_\lambda=\{(u,v)\in\bar{\Omega}:M(u,v)=N_\lambda(u,v)\}$，则有 $QN_\lambda(u,v)=\theta$，$N_\lambda^{(1)}(u,v)=D_{0^+}^{\beta_1}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha_1}u))$，$N_\lambda^{(2)}(u,v)=D_{0^+}^{\beta_2}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha_2}v))$，且 u，v 满足：

$$D_{0^+}^{\alpha_1}u(0)=u(0)=D_{0^+}^{\alpha_1}R_1(u,v,\lambda)(0)=R_1(u,v,\lambda)(0)=0,$$

$$D_{0^+}^{\alpha_2}v(0)=v(0)=D_{0^+}^{\alpha_1}R_2(u,v,\lambda)(0)=R_2(u,v,\lambda)(0)=0,$$

因此有：

$$\begin{aligned}R_1(u,v,\lambda)=&I_{0^+}^{\alpha_1}\varphi_q(I_{0^+}^{\beta_1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)))=\\&I_{0^+}^{\alpha_1}\varphi_q(I_{0^+}^{\beta_1}(N_\lambda^{(1)}(u,v)))=I_{0^+}^{\alpha_1}\varphi_q(I_{0^+}^{\beta_1}(D_{0^+}^{\beta_1}(\varphi_p(D_{0^+}^{\alpha_1}u))))=\\&I_{0^+}^{\alpha_1}(D_{0^+}^{\alpha_1}u)=u-\frac{D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(0)}{\Gamma(\alpha_1)}t^{\alpha_1-1}=(I-P_1)u。\end{aligned}$$

同理可得：$R_2(u,v,\lambda)=(I-P_2)v$，则 $R(u,v,\lambda)=(R_1(u,v,\lambda),R_2(u,v,\lambda))=(I-P)(u,v)$，定义 2 中的(c) 成立。对于$(u,v)\in\bar{\Omega}$，有：

$$\begin{cases}M_1[P_1(u,v)+R_1(u,v,\lambda)]=N_\lambda^{(1)}(u,v)-Q_1N_\lambda^{(1)}(u,v)=(I-Q_1)N_\lambda^{(1)}(u,v),\\M_2[P_2(u,v)+R_2(u,v,\lambda)]=N_\lambda^{(2)}(u,v)-Q_2N_\lambda^{(2)}(u,v)=(I-Q_2)N_\lambda^{(2)}(u,v),\end{cases}$$

则有 $M[P(u,v)+R(u,v,\lambda)]=(I-Q)N_\lambda(u,v)$，定义 2 中的(d) 成立。因此 N_λ 在 $\bar{\Omega}$ 中是 M- 紧的。证毕。

定理 2 假设下列条件成立：

H_1) 存在 2 个常数 $K_1,K_2>0$，使得下列不等式之一成立：

$$1)\begin{cases}当\ |B|>K_1\ 时，Bf(t,A,B,C,D,E,F)>0,\quad t\in[0,1],\quad A,C,D,E,F\in\mathbf{R},\\当\ |E|>K_2\ 时，Eg(t,A,B,C,D,E,F)>0,\quad t\in[0,1],\quad A,B,C,D,F\in\mathbf{R},\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}当\ |B|>K_1\ 时，Bf(t,A,B,C,D,E,F)<0,\quad t\in[0,1],\quad A,C,D,E,F\in\mathbf{R},\\当\ |E|>K_2\ 时，Eg(t,A,B,C,D,E,F)<0,\quad t\in[0,1],\quad A,B,C,D,F\in\mathbf{R}。\end{cases}$$

H_2) 存在非负函数 $a_i(t),b_i(t),c_i(t),d_i(t),e_i(t),l_i(t),r_i(t)\in C[0,1]$，$i=1,2$，使得：

$$\begin{cases}|f(t,A,B,C,D,E,F)|\leqslant a_1(t)\varphi_p(|A|)+b_1(t)\varphi_p(|B|)+c_1(t)\varphi_p(|C|)+d_1(t)\varphi_p(|D|)+\\\qquad e_1(t)\varphi_p(|E|)+l_1(t)\varphi_p(|F|)+r_1(t),\quad t\in[0,1],\quad A,B,C,D,E,F\in\mathbf{R},\\|g(t,A,B,C,D,E,F)|\leqslant a_2(t)\varphi_p(|A|)+b_2(t)\varphi_p(|B|)+c_2(t)\varphi_p(|C|)+d_2(t)\varphi_p(|D|)+\\\qquad e_2(t)\varphi_p(|E|)+l_2(t)\varphi_p(|F|)+r_2(t),\quad t\in[0,1],\quad A,B,C,D,E,F\in\mathbf{R}。\end{cases}$$

当 $1<p\leqslant2$ 时，$a_i(t),b_i(t),c_i(t),d_i(t),e_i(t),l_i(t)$ 满足下列不等式之一：

a) $(1-A_1)(1-B_2)-A_2B_1>0$，其中：

$$A_1=\frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty+\|c_1\|_\infty\right)<1,$$

$$A_2=\frac{2^{q-2}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_1\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_1\|_\infty+\|l_1\|_\infty\right)<1,$$

$$B_1=\frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_2\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_2\|_\infty+\|c_2\|_\infty\right)<1,$$

$$B_2=\frac{2^{q-2}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_2\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_2\|_\infty+\|l_2\|_\infty\right)<1,$$

b) $(1-A'_1)(1-B'_2)-A'_2B'_1>0$，其中：

$$A'_1=\frac{2^{q-2}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty+\|c_1\|_\infty\right)<1,$$

$$A'_2 = \frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_1\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|e_1\|_\infty + \|l_1\|_\infty\right) < 1,$$

$$B'_1 = \frac{2^{q-2}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_2\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))} + \|b_2\|_\infty + \|c_2\|_\infty\right) < 1,$$

$$B'_2 = \frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_2\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|e_2\|_\infty + \|l_2\|_\infty\right) < 1;$$

当 $p > 2$ 时，$a_i(t)$，$b_i(t)$，$c_i(t)$，$d_i(t)$，$e_i(t)$，$l_i(t)$ 满足：$(1-C_1)(1-D_2) - C_2 D_1 > 0$，其中：

$$C_1 = \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty 2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))} + \|b_1\|_\infty 2^{p-2} + \|c_1\|_\infty\right) < 1,$$

$$C_2 = \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_1\|_\infty 2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|e_1\|_\infty 2^{p-2} + \|l_1\|_\infty\right) < 1,$$

$$D_1 = \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_2\|_\infty 2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))} + \|b_2\|_\infty 2^{p-2} + \|c_2\|_\infty\right) < 1,$$

$$D_2 = \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_2\|_\infty 2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|e_2\|_\infty 2^{p-2} + \|l_2\|_\infty\right) < 1。$$

那么，边界值问题(1) 至少有 1 个解。

为方便起见，令

$$T_1 = \frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(K_1)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))} + \|b_1\|_\infty\varphi_p(K_1) + \|e_1\|_\infty\varphi_p(K_2) + \frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(K_2)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|r_1\|_\infty\right),$$

$$T_2 = \frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_2\|_\infty\varphi_p(K_1)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))} + \|b_2\|_\infty\varphi_p(K_1) + \|e_2\|_\infty\varphi_p(K_2) + \frac{\|d_2\|_\infty\varphi_p(K_2)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|r_2\|_\infty\right),$$

$$T_3 = \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))} + \|b_1\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2} + \|e_1\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2} + \frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|r_1\|_\infty\right),$$

$$T_4 = \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_2\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))} + \|b_2\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2} + \|e_2\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2} + \frac{\|d_2\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))} + \|r_2\|_\infty\right)。$$

为了证明定理 2，给出 2 个引理。

引理 9　假设条件 H_1）和条件 H_2）成立，那么集合 $\Omega_1 = \{(u,v) \in \mathrm{dom}M \mid M(u,v) = N_\lambda(u,v), \lambda \in (0,1)\}$ 在 X 中是有界的。

证明　对于$(u,v) \in \Omega_1$，有 $Q_1 N_\lambda^{(1)}(u,v) = Q_2 N_\lambda^{(2)}(u,v) = \theta$，由条件 H_1）可得，存在 $t_0, t_1 \in [0,1]$，使得 $D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t_0) | \leqslant K_1$，$| D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t_1) | \leqslant K_2$。由于：

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t) = D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t_0) + \int_{t_0}^t D_{0^+}^{\alpha_1}u(s)\mathrm{d}s, \\ D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t) = D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t_1) + \int_{t_1}^t D_{0^+}^{\alpha_2}v(s)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

则有：

$$\begin{cases} | D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t) | \leqslant K_1 + \|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty, \\ | D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t) | \leqslant K_2 + \|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty, \end{cases} \tag{6}$$

根据 $u(0) = v(0) = 0$，可得：

$$\begin{cases} u(t) = I_{0^+}^{\alpha_1-1}D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-2}D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(s)\mathrm{d}s, \\ v(t) = I_{0^+}^{\alpha_2-1}D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-2}D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(s)\mathrm{d}s, \end{cases}$$

综上可得：

$$\begin{cases} |u(t)| \leqslant \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_1-1)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-2}(K_1+\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)\mathrm{d}s \leqslant \dfrac{K_1+\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty}{\Gamma(\alpha_1)}, \\ |v(t)| \leqslant \dfrac{1}{\Gamma(\alpha_2-1)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-2}(K_2+\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)\mathrm{d}s \leqslant \dfrac{K_2+\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty}{\Gamma(\alpha_2)}, \end{cases} \tag{7}$$

因为$(M_1u,M_2v)=(N_\lambda^{(1)}(u,v),N_\lambda^{(2)}(u,v))$，$D_{0^+}^{\alpha_1}u(0)=D_{0^+}^{\alpha_2}v(0)=0$，则有：

$$D_{0^+}^{\alpha_1}u(t)=\varphi_q(I_{0^+}^{\beta_1}(-\lambda f(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t))))=$$
$$\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_1)}\int_0^t (t-s)^{\beta_1-1}(-\lambda f(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)))\mathrm{d}s\right);$$
$$D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)=\varphi_q(I_{0^+}^{\beta_2}(-\lambda g(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t))))=$$
$$\varphi_q\left(\frac{1}{\Gamma(\beta_2)}\int_0^t (t-s)^{\beta_2-1}(-\lambda g(t,u(t),D_{0^+}^{\alpha_1-1}u(t),D_{0^+}^{\alpha_1}u(t),v(t),D_{0^+}^{\alpha_2-1}v(t),D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)))\mathrm{d}s\right)。$$

根据条件 H_2）和式(6)、式(7) 可得：

$$|D_{0^+}^{\alpha_1}u(t)| \leqslant \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q(\|a_1\|_\infty\varphi_p(\|u\|_\infty)+\|b_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1-1}u\|_\infty)+\|c_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+$$
$$\|d_1\|_\infty\varphi_p(\|v\|_\infty)+\|e_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2-1}v\|_\infty)+\|l_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)+\|r_1\|_\infty),$$
$$|D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)| \leqslant \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_2+1))}\varphi_q(\|a_2\|_\infty\varphi_p(\|u\|_\infty)+\|b_2\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1-1}u\|_\infty)+\|c_2\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+$$
$$\|d_2\|_\infty\varphi_p(\|v\|_\infty)+\|e_2\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2-1}v\|_\infty)+\|l_2\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)+\|r_2\|_\infty)。$$

1）当 $1<p\leqslant 2$ 时，有：

$$|D_{0^+}^{\alpha_1}u(t)| \leqslant \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(K_1)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty\varphi_p(K_1)+\right.$$
$$\|b_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+\|c_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+\frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(K_2)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|l_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)+$$
$$\left.\frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_1\|_\infty\varphi_p(K_2)+\|e_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)+\|r_1\|_\infty\right)\leqslant$$
$$\frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(K_1)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty\varphi_p(K_1)+\|e_1\|_\infty\varphi_p(K_2)+\|r_1\|_\infty+\frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(K_2)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}\right)+$$
$$\frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(\|\alpha_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+\|c_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)\right)+$$
$$\frac{2^{q-2}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)+\|l_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)\right)\leqslant$$
$$T_1+\frac{2^{2q-4}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|a_1\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty+\|c_1\|_\infty\right)(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+$$
$$\frac{2^{q-2}}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\left(\frac{\|d_1\|_\infty}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_1\|_\infty+\|l_1\|_\infty\right)(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)\leqslant$$
$$T_1+A_1\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty+A_2\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty, \tag{8}$$

同理可得：

$$|D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)| \leqslant T_2+B_1\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty+B_2\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty。 \tag{9}$$

由式(8) 和式(9) 可得：

$$\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty \leqslant \frac{T_1+A_2\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty}{1-A_1}, \quad \|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty \leqslant \frac{T_2+B_1\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty}{1-B_2},$$

所以有：

$$\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty \leqslant \frac{T_1(1-B_2)+A_2T_2}{(1-A_1)(1-B_2)-A_2B_1}, \quad \|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty \leqslant \frac{T_2(1-A_1)+B_1T_1}{(1-A_1)(1-B_2)-A_2B_1}。$$

2）当 $p>2$ 时，有：

$$\begin{aligned}
|D_{0^+}^{\alpha_1}u(t)| \leqslant & \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\Big(\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+ \\
& \|b_1\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2}+\|b_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)2^{p-2}+\|c_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+ \\
& \frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_1\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2}+\|l_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)+ \\
& \frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_1\|_\infty\varphi_p(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)2^{p-2}+\|r_1\|_\infty\Big)\leqslant \\
& \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\Big(\frac{\|a_1\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty\varphi_p(K_1)2^{p-2}+ \\
& \|e_1\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2}+\|r_1\|_\infty+\frac{\|d_1\|_\infty\varphi_p(K_2)2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}\Big)+ \\
& \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\Big(\frac{\|a_1\|_\infty 2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_1))}+\|b_1\|_\infty 2^{p-2}+\|c_1\|_\infty\Big)(\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty)+ \\
& \frac{1}{\varphi_q(\Gamma(\beta_1+1))}\varphi_q\Big(\frac{\|d_1\|_\infty 2^{p-2}}{\varphi_p(\Gamma(\alpha_2))}+\|e_1\|_\infty 2^{p-2}+\|l_1\|_\infty\Big)(\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty)\leqslant \\
& T_3+C_1\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty+C_2\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty,
\end{aligned} \tag{10}$$

同理可得：

$$|D_{0^+}^{\alpha_2}v(t)|\leqslant T_4+D_1\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty+D_2\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty。 \tag{11}$$

由式(10)和式(11)可得：

$$\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty\leqslant\frac{T_3+C_2\|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty}{1-C_1},\quad \|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty\leqslant\frac{T_4+D_1\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty}{1-D_2},$$

因此，

$$\|D_{0^+}^{\alpha_1}u\|_\infty\leqslant\frac{T_3(1-D_2)+C_2T_4}{(1-C_1)(1-D_2)-C_2D_1},\quad \|D_{0^+}^{\alpha_2}v\|_\infty\leqslant\frac{T_4(1-C_1)+D_1T_3}{(1-C_1)(1-D_2)-C_2D_1}。$$

综上所述可得 Ω_1 是有界的。证毕。

引理 10　若条件 H_1）成立，那么 $\Omega_2=\{(u,v)\in \mathrm{Ker}M \mid QN(u,v)=\theta\}$ 在 X 中是有界的，其中 $N=N_1$。

证明　参考文献[20]。

下面证明定理 2 成立。

取 $\Omega\supset\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2\cup\left\{(u,v)\mid(u,v)\in X,\|(u,v)\|\leqslant\max\left\{\frac{K_1}{\Gamma(\alpha_1)},\frac{K_2}{\Gamma(\alpha_2)},K_1,K_2\right\}+1\right\}$ 是 X 中的有界开集。由引理 9 和引理 10 知，若 $(u,v)\in \mathrm{dom}M\cap\partial\Omega$，则 $M(u,v)\neq N_\lambda(u,v)$，且 $QN(u,v)\neq\theta$。令

$$H(u,v,\delta)=(H_1(u,v,\delta),H_2(u,v,\delta)),$$

其中 $H_1(u,v,\delta)=\rho\delta u+(1-\delta)J_1Q_1N^{(1)}(u,v)$，$H_2(u,v,\delta)=\rho\delta v+(1-\delta)J_2Q_2N^{(2)}(u,v)$，$(u,v)\in \mathrm{Ker}M\cap\bar{\Omega}$，$\delta\in[0,1]$，且 $J_i:R=\mathrm{Im}Q_i\rightarrow \mathrm{Ker}M_i$ 定义为 $J_ic_i=c_it^{\alpha_i-1}$，$i=1,2$，$\rho=\begin{cases}-1，若条件 H_1)(1) 成立，\\ 1，若条件 H_1)(2) 成立。\end{cases}$

取 $(u,v)\in \mathrm{Ker}M\cap\partial\Omega$，可知 $(u,v)=(k_1t^{\alpha_1-1},k_2t^{\alpha_2-1})\neq\theta$，且 $\|(u,v)\|=\max\left\{\frac{K_1}{\Gamma(\alpha_1)},\frac{K_2}{\Gamma(\alpha_2)},K_1,K_2\right\}+1$，因此有：

$$\begin{cases}H_1(u,v,\delta)=\rho\delta k_1t^{\alpha_1-1}+(1-\delta)Q_1(-f)t^{\alpha_1-1},\\ H_2(u,v,\delta)=\rho\delta k_2t^{\alpha_2-1}+(1-\delta)Q_2(-g)t^{\alpha_2-1}。\end{cases}$$

当 $\delta=1$ 时，$H_1(u,v,1)=\rho k_1t^{\alpha_1-1}$，$H_2(u,v,1)=\rho k_2t^{\alpha_2-1}$，所以 $H(u,v,\delta)\neq\theta$。当 $\delta=0$ 时，由条件 H_1）可得：

$$\begin{cases}H_1(u,v,0)=Q_1(-f)t^{\alpha_1-1}=-Q_1ft^{\alpha_1-1},\\ H_2(u,v,0)=Q_2(-g)t^{\alpha_2-1}=-Q_2gt^{\alpha_2-1}。\end{cases}$$

从而 $H(u,v,\delta)\neq\theta$。当 $0<\delta<1$ 时，如果 $H_1(u,v,\delta)=0$，那么 $k_1=\dfrac{1-\delta}{\delta}\rho(Q_1f)$，$k_2=\dfrac{1-\delta}{\delta}\rho(Q_2g)$，两边分别同乘 $\Gamma(\alpha_1)k_1$，$\Gamma(\alpha_2)k_2$ 可得：

$$0<\Gamma(\alpha_1)k_1^2=\frac{1-\delta}{\delta}\rho\Gamma(\alpha_1)k_1(Q_1f),\quad 0<\Gamma(\alpha_2)k_2^2=\frac{1-\delta}{\delta}\rho\Gamma(\alpha_2)k_2(Q_2g),$$

与条件 H_1）矛盾。故 $H(u,v,\delta)\neq 0$，其中 $\delta\in[0,1]$，$(u,v)\in\mathrm{Ker}M\cap\partial\Omega$。

由度的同伦性不变性，可得：

$$\begin{aligned}\deg(JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}M,0)&=\deg(H(u,v,0),\Omega\cap\mathrm{Ker}M,0=\\&\deg(H(u,v,1),\Omega\cap\mathrm{Ker}M,0)=\\&\deg(\rho I,\Omega\cap\mathrm{Ker}M,0)\neq 0。\end{aligned}$$

通过定理1可得 $M(u,v)=N(u,v)$ 在 $\bar{\Omega}$ 中至少有1个解。证毕。

4 例 子

例1 考虑下面具有 p-Laplacian 算子的共振微分方程组边值问题：

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\frac{1}{2}}(\varphi_p(D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u))(t)+f(t,u(t),D_{0^+}^{\frac{1}{2}}u(t),D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(t),v(t),D_{0^+}^{\frac{1}{4}}v(t),D_{0^+}^{\frac{5}{4}}v(t))=0,\\ D_{0^+}^{\frac{1}{4}}(\varphi_p(D_{0^+}^{\frac{5}{4}}u))(t)+g(t,u(t),D_{0^+}^{\frac{1}{2}}u(t),D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(t),v(t),D_{0^+}^{\frac{1}{4}}v(t),D_{0^+}^{\frac{5}{4}}v(t))=0,\\ u(0)=D_{0^+}^{\frac{3}{2}}u(0)=v(0)=D_{0^+}^{\frac{5}{4}}v(0)=0,\\ u(1)=\int_0^1h_1(t)u(t)\mathrm{d}t,v(1)=\int_0^1h_2(t)v(t)\mathrm{d}t\end{cases}\tag{12}$$

解的存在性，其中：$\alpha_1=\dfrac{3}{2}$，$\beta_1=\dfrac{1}{2}$，$\alpha_2=\dfrac{5}{4}$，$\beta_2=\dfrac{1}{4}$，$p=4$，$K_1=K_2=4$，$h_1(t)=2t^{\frac{1}{2}}$，$h_2(t)=2t^{\frac{3}{4}}$，

$f(t,A,B,C,D,E,F)=\dfrac{1}{220}t^2\sin A^3+\dfrac{1}{60}t^2B^3+\dfrac{1}{160}t^2\sin(tC)^3+\dfrac{1}{240}t^2\sin D^3+\dfrac{1}{100}t^2\sin E^3+\dfrac{1}{180}t^2\sin(tF)^3+t^3$，

$g(t,A,B,C,D,E,F)=\dfrac{1}{240}t^2\sin A^3+\dfrac{1}{80}t^2\sin B^3+\dfrac{1}{120}t^2\sin C^3+\dfrac{1}{280}t^2\sin D^3+\dfrac{1}{56}t^2E^3+\dfrac{1}{200}t^2\sin F^3+t^3$。

证明 显然条件 H_1）成立，根据定义可得：

$$\begin{aligned}|f(t,A,B,C,D,E,F)|\leqslant&|a_1(t)|\varphi_p(|A|)+|b_1(t)|\varphi_p(|B|)+|c_1(t)|\varphi_p(|C|)+\\&|d_1(t)|\varphi_p(|D|)+|e_1(t)|\varphi_p(|E|)+|l_1(t)|\varphi_p(|F|)+|r_1(t)|,\\|g(t,A,B,C,D,E,F)|\leqslant&|a_2(t)|\varphi_p(|A|)+|b_2(t)|\varphi_p(|B|)+|c_2(t)|\varphi_p(|C|)+\\&|d_2(t)|\varphi_p(|D|)+|e_2(t)|\varphi_p(|E|)+|l_2(t)|\varphi_p(|F|)+|r_r(t)|。\end{aligned}$$

通过简单的计算，可以得到：

$$C_1=\frac{1}{(\Gamma(1.5))^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4\|a_1\|_\infty}{(\Gamma(1.5))^3}+4\|b_1\|_\infty+\|c_1\|_\infty\right)^{\frac{1}{3}}=0.481\,7<1,$$

$$C_2=\frac{1}{(\Gamma(1.5))^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4\|d_1\|_\infty}{(\Gamma(1.25))^3}+4\|e_1\|_\infty+\|l_1\|_\infty\right)^{\frac{1}{3}}=0.424\,8<1,$$

$$D_1=\frac{1}{(\Gamma(1.25))^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4\|a_2\|_\infty}{(\Gamma(1.5))^3}+4\|b_2\|_\infty+\|c_2\|_\infty\right)^{\frac{1}{3}}=0.449\,4<1,$$

$$D_2=\frac{1}{(\Gamma(1.25))^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{4\|d_2\|_\infty}{(\Gamma(1.25))^3}+4\|e_2\|_\infty+\|l_2\|_\infty\right)^{\frac{1}{3}}=0.472\,5<1,$$

$(1-C_1)(1-D_2)-C_2D_1=0.082\,5>0$，条件 H_2）成立，通过定理2可知，问题(12)至少有1个解。证毕。

参考文献/References：

[1] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[M]. London: Academic Press, 1999.

[2] MA Ruyun. Existence results of a m-point boundary value problem at resonance[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 294(1): 147-157.

[3] 江卫华，杨彩霞. 一类多点共振方程组边值问题正解的存在性[J]. 河北科技大学学报，2016，37(4)：340-348.
JIANG Weihua, YANG Caixia. Existence of positive solutions for multi-point resonance systems of differential equations with boundary value conditions[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2016, 37(4): 340-348.

[4] DU Zengji, LIN Xiaojie, GE Wei. Some higher order multi-point boundary value problems at resonance[J]. Journal of computational and

Applied Mathematics, 2005, 177(1): 55-65.

[5] FENG Wenying, WEBB J R L. Solvability of m-point boundary value problems with nonlinear growth[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 212(2): 467-480.

[6] LIAN Hairong, PANG Huihui, GE Weigao. Solvability for second-order three-point boundary value problem at resonance on a half-line [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 337: 1171-1181.

[7] ZHANG Xuemei, FENG Meiqiang, GE Wei. Existence result of second-order differential equations with integral boundary conditions at resonance[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 353(1): 311-319.

[8] LIU Bingmei, LI Junling, LIU Lishan. Existence and uniqueness for an m-point boundary value problem at resonance on infinite intervals [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 64(6): 1677-1690.

[9] BAI Chuanzhi, FANG Jinxuan. Existence of positive solutions for three-point boundary value problems at resonance[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 291(2): 538-549.

[10] KOSMATOV N. Multi-point boundary value problems on an unbounded domain at resonance[J]. Nonlinear Analysis-Theory, Methods & Applications, 2008, 68(8): 2158-2171.

[11] KOSMATOV N. A boundary value problem of fractional order at resonance[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2010, 2010 (135): 1655-16466.

[12] LIU Bin. Solvability of multi-point boundary value problem at resonance (Ⅱ)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 136: 353-377.

[13] LIU Bin, YU Jianshe. Solvability of multi-point boundary value problem at resonance (Ⅲ)[J]. Applied Mathematics and Computation, 2002, 129: 119-143.

[14] LIU Yuji, GE Weigao. Solvability of nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations of higher order [J]. Nonlinear Analysis-Theory, Methods & Applications, 2004, 57: 435-458.

[15] JIANG Weihua. Solvability for a coupled system of fractional differential equations at resonance[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2012, 13(5): 2285-2292.