

关于[4. 8. 8]铺砌中椭圆上 D -点数的研究

魏祥林, 王卫琪

(河北科技大学理学院, 河北石家庄 050018)

摘要:阿基米德平面铺砌是指用一种或多种正多边形铺砌全平面,且要求铺砌的每个顶点的顶点特征相同。阿基米德平面铺砌共有 11 种,针对其中的[4. 8. 8]铺砌,即每个铺砌顶点连接边长相同的一个正方形,两个正八边形,研究[4. 8. 8]铺砌上的椭圆所包含铺砌顶点数的特性,通过对椭圆内半弦上顶点列的分析,采用数的几何及数论中同余的方法给出顶点数的取值算法,并获得顶点数与椭圆短半轴长平方的比值的极限公式,证明极限值与对应铺砌的中心多边形的面积有关。所得算法及极限公式对其他阿基米德铺砌中相关问题的研究有借鉴作用。

关键词:离散几何;阿基米德铺砌;椭圆;中心多边形;凸包

中图分类号:O157.3 **MSC(2010)主题分类:**52C15 **文献标志码:**A

Research about the number of D -points of [4. 8. 8]-tiling in given ellipse

WEI Xianglin, WANG Weiqi

(School of Science, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: An Archimedean tiling is a tiling of the plane by one type of regular polygon or several types of regular polygons, and every vertex of the tiling has the same vertex characteristics. There are 11 Archimedean tiling, and this paper studies [4. 8. 8]-tiling, which is an Archimedean tiling generated by squares and regular octagons in the plane, and every vertex is associated with one square and two octagons. This paper studies the number of vertices contained in an ellipse in [4. 8. 8]-tiling. Through analysing the sequence of vertices lying on half chord in the ellipse, and using the method of the geometry of number and congruence in number theory, it presents an algorithm about the value of the number of vertices contained in the ellipse, and obtains a formula of limit about the number of vertices and the square of short semi-axis of the ellipse. It is proved that the value of limit is connected with the area of the corresponding central polygon. The algorithm and the formula of limit are very useful for the study of related problems in other Archimedean tilings.

Keywords: discrete geometry; Archimedean tiling; ellipse; central polygon; convex hull

收稿日期:2016-08-12;修回日期:2017-02-01;责任编辑:张 军

基金项目:河北省自然科学基金(A2014208095)

第一作者简介:魏祥林(1974—),女,河北张家口人,教授,博士,主要从事离散与组合几何方面的研究。

E-mail:sd_wxl@126.com

魏祥林,王卫琪. 关于[4. 8. 8]铺砌中椭圆上 D -点数的研究[J]. 河北科技大学学报,2017,38(2):143-150.

WEI Xianglin, WANG Weiqi. Research about the number of D -points of [4. 8. 8]-tiling in given ellipse[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology,2017,38(2):143-150.

离散与组合几何^[1]中一个重要研究课题是平面铺砌^[2]问题,平面铺砌 $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$ 是指可数个闭集 T_1, T_2, \dots 构成的集族,满足 $R^2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$, 任意两个 $T_i (i=1, 2, \dots)$ 的内部不交, 闭集 $T_i (i=1, 2, \dots)$ 称为铺砌元. \mathcal{T} 中任意两个铺砌元的交或为空集, 或为孤立点, 或为曲线集. 交点称为铺砌的顶点, 交曲线称为铺砌的边, 边对边铺砌指每个铺砌元是多边形且相邻的铺砌元共有一个完整的铺砌边^[3]. 如果铺砌中任一顶点周围的铺砌元按环形顺序依次是 n_1 边形, n_2 边形, n_3 边形等等, 就称该顶点为 $[n_1, n_2, n_3, \dots]$ 型. 以正多边形为铺砌元且所有顶点属同一类型的铺砌恰好有 11 种^[4-5], 这 11 种铺砌统称为阿基米德铺砌. 在所有 11 种阿基米德铺砌中, 由单一铺砌元生成的铺砌共有 3 种, 分别为由正三角形生成的 $[3, 3, 3, 3, 3, 3]$ 铺砌, 由正方形生成的 $[4, 4, 4, 4]$ 铺砌, 由正六边形生成 $[6, 6, 6]$ 铺砌. 所有正多边形的顶点为铺砌顶点, 所有正多边形的边为铺砌边.

从铺砌的定义看出, 整数格即可视为由单位正方形构成的 $[4, 4, 4, 4]$ 阿基米德铺砌的顶点集. 从这个意义出发, 利用数的几何中讨论格点性质的相关手法探讨其他阿基米德铺砌的顶点性质成为一个有意义的研究课题. DING 等^[6] 首次尝试将数的几何中关于整数格点的 Pick 定理推广至 $[6, 6, 6]$ 铺砌的顶点集^[6], 之后在相关问题研究中获得了一系列成果^[7-13]. 在以上研究的基础上, KOLODZIEJCZYK 等^[8-9, 14-19] 从几何的角度证明数论中一些计数问题和面积问题. 本文主要研究的是由正方形和正八边形生成的 $[4, 8, 8]$ 铺砌上的计数问题.

$[4, 8, 8]$ 铺砌是一种阿基米德铺砌, 如图 1 所示. 这里为了讨论的方便, 记 $[4, 8, 8]$ 铺砌的顶点集为 D , 其中的点称为 D -点, 本文中 $[4, 8, 8]$ 铺砌中正八边形与正方形铺砌元的边长均取为 1. 在 $[4, 8, 8]$ 阿基米德铺砌中以正八边形中心为椭圆中心、以正整数 n 为短半轴长、 $2n$ 为长半轴长的椭圆记为 $E(n)$, $E(n)$ 的内部和边界上所含的顶点数记为 $\mathcal{N}(n)$.

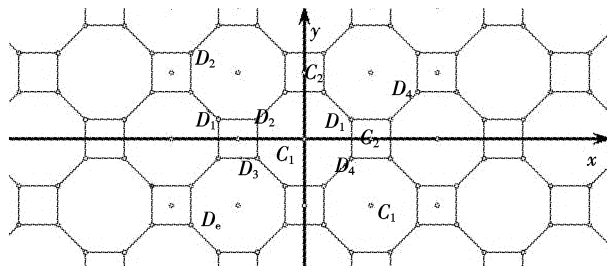


图 1 C-点和D-点的分布

Fig. 1 Distribution of C-points and D-points

1 基本定义

定义所有正八边形铺砌元的中心组成的集合为 C_1 , C_1 中的点称为 C_1 -点, 定义所有正方形铺砌元的中心组成的集合为 C_2 , C_2 中的点称为 C_2 -点. 记 D_1, D_2, D_3, D_4 分别为所有 C_1 -点按向量 $(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2})$ 平移后所得的点的集合, 如图 1 所示, 易见 $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$. 则水平方向相邻的 D_1 与 D_2 之间的距离为 1 或 $1+\sqrt{2}$, 水平方向相邻的 D_3 与 D_4 之间的距离也为 1 或 $1+\sqrt{2}$.

定义 1 在 E^n 中, 若一个集合中任意 2 点的线段均含于该集合中, 则称该集合为凸集. 称包含一个集合的最小凸集为该集合的凸包.

定义 2 在 $[4, 8, 8]$ 阿基米德铺砌中, 与一个铺砌顶点相关联的每个铺砌元的中心的凸包形成的图形称为该顶点对应的中心多边形.

2 相关引理和主要结论

引理 1^[20] 在铺砌边长均为 1 的 $[4, 4, 4, 4]$ 阿基米德铺砌中, 以铺砌的任意顶点为圆心、以正整数 n 为半径的圆的内部和边界上所含铺砌顶点的个数记为 $\mathcal{N}(n)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(n)}{n^2} = \frac{\pi}{S}$, 其中 S 为对应铺砌的正方形铺砌元的面积.

本文研究 $[4, 8, 8]$ 阿基米德铺砌中, 落在椭圆 $E(n)$ 的内部和边界上的顶点数 $\mathcal{N}(n)$ 的取值, 给出相应的算法, 并得出下述结论.

定理 1 在铺砌边长均为 1 的 [4.8.8] 阿基米德铺砌中, 设 $E(n)$ 为以正八边形中心为椭圆中心、以正整数 n 为短半轴长、 $2n$ 为长半轴长的椭圆。 $E(n)$ 的内部和边界上所含 D -点的个数记为 $\mathcal{N}(n)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(n)}{n^2} = 2 \frac{\pi}{S}$, 其中 S 为 [4.8.8] 铺砌的中心多边形面积。

3 $\mathcal{N}(n)$ 的取值分析

以任一 C_1 -点为原点, 过正八边形中心 C_1 -点和正方形中心 C_2 -点的水平直线为 x 轴、竖直直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 记原点为 O 。以原点 O 为椭圆中心作短半轴长为正整数 n 、长半轴长为 $2n$ 的椭圆, 椭圆与 x 轴的交点记为 A_0, B_0 , 与 y 轴的交点记为 E, F , 记 A_0B_0 所确定的直线为 l_0 。现将 l_0 沿 y 轴正向平移, 记第一次遇到 D -点的直线为 l_1 , 与椭圆 $E(n)$ 的交点记为 A_1, B_1 , 弦 A_1B_1 的中点为 O_1 ; l_0 继续沿 y 轴正向平移, 记第二次遇到 D -点的直线为 l_2 , 与椭圆 $E(n)$ 的交点记为 A_2, B_2 , 弦 A_2B_2 的中点为 O_2 。依次进行下去, 记第 i 条直线为 l_i , l_i 与椭圆 $E(n)$ 的交点记为 A_i, B_i , 弦 A_iB_i 的中点为 O_i , 其中 $i=0, 1, 2, \dots, k$ 。即 l_{k+1} 与椭圆 $E(n)$ 是相离关系, 由上述过程可知, 所有的弦 l_i 都是平行的, 而平行线 $l_0, l_1, l_2, \dots, l_k$ 之间的距离分别是 $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \dots$ 。

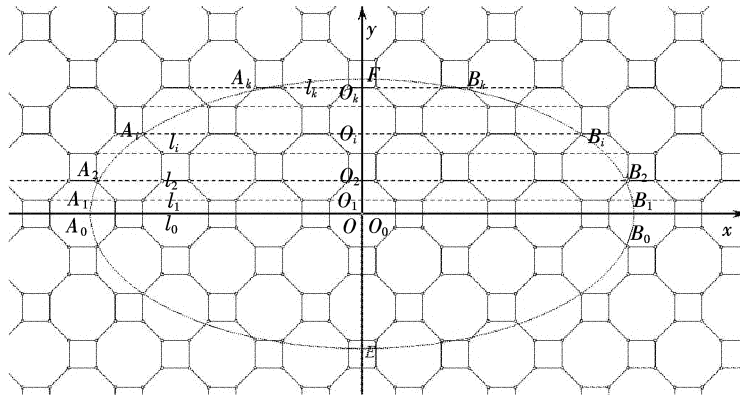


图 2 椭圆弦的分布

Fig. 2 Distribution of the chords of the ellipse

令 $[a]$ 表示 a 的整数部分, $\{a\}$ 表示 a 的小数部分, 则 $\{a\} = a - [a]$ 。从图 2 中不难发现, l_0 与 l_1 之间的距离为 $\frac{1}{2}$, l_i 与 l_{i+2} 之间的距离为 $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 其中 $i=1, 2, \dots, k-2$, l_i 与 l_{i+1} 之间的距离为 1 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其中 $i=1, 2, \dots, k-1$, 所以根据椭圆与 y 轴正向的交点 F 所处的两条相邻平行线 l_i 与 l_{i+1} 之间的距离不同, 分两种情形对 k 的取值进行讨论。

情形 A 包含 F 的 2 条平行线 l_i 与 l_{i+1} 之间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。此时 i 是奇数, 短半轴长 n 满足:

$$0 \leq \left\{ \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 从 } x \text{ 轴到点 } F \text{ 与 } x \text{ 轴平行弦的个数 } k = \left\lceil \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\rceil \times 2 + 1.$$

情形 B 包含 F 的两条平行线 l_i 与 l_{i+1} 之间的距离为 1。此时 i 是偶数, 短半轴长 n 满足:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left\{ \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\} \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) < \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \text{ 时, 从 } x \text{ 轴到点 } F \text{ 与 } x \text{ 轴平行弦的个数 } k = \left\lceil \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\rceil \times 2 + 2.$$

记弦心距 $|O_0O_i|$ 为 y_i , 半弦长 $|O_iB_i|$ 为 x_i , 其中 $i=0, 1, 2, \dots, k$ 。当 i 是奇数时, $y_i = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{i-1}{2} + \frac{1}{2}$;

当 i 是偶数时, $y_i = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$; 由椭圆公式得 $x_i = 2 \sqrt{n^2 - y_i^2}$, 半弦长 x_i 上所含 D -点的个数记为 a_i 。因为长轴 A_0B_0 和短轴 EF 把椭圆 $E(n)$ 分成关于椭圆中心完全对称的 4 部分, 由椭圆对称性知 $\mathcal{N}(n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \times 4$ 。根据直线 l_i 上分布的 D -点类型的不同, 分以下 4 种情形讨论。

情形 1 $i \equiv 0 \pmod{4}$

半弦 O_iB_i 上分布的 D -点序列为 $(D_4, D_3, D_4, D_3, \dots)$, 而相邻两点 D_3 与 D_4 之间的距离为 1 或 $1 + \sqrt{2}$, 根据 B_i 的位置不同, 分两种情形对 a_i 的取值进行讨论。

情形 1.1 B_i 位于距离为 1 的相邻两点 D_4 与 D_3 之间。 x_i 满足: $0 \leq \left\{ \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\} \times (2 + \sqrt{2}) < 1$, 线

段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_4, D_3, D_4, \dots, D_3, D_4)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 1$ 。

情形 1.2 B_i 位于距离为 $1 + \sqrt{2}$ 的相邻两点 D_3 与 D_4 之间。 x_i 满足: $1 \leq \left\{ \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\} \times (2 + \sqrt{2}) <$

$2 + \sqrt{2}$, 线段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_4, D_3, \dots, D_4, D_3)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 2$ 。

情形 2 $i \equiv 1 \pmod{4}$

半弦 O_iB_i 上分布的 D -点序列为 $(D_1, D_2, D_1, D_2, \dots)$, 而相邻两点 D_1 与 D_2 之间的距离为 1 或 $1 + \sqrt{2}$, 根据 B_i 的位置不同, 分两种情形对 a_i 的取值进行讨论。

情形 2.1 B_i 位于距离为 1 的相邻两点 D_1 与 D_2 之间。 x_i 满足: $0 \leq \left\{ \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\} \times (2 + \sqrt{2}) < 1$, 线

段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_1, D_2, \dots, D_1, D_2, D_1)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 1$ 。

情形 2.2 B_i 位于距离为 $1 + \sqrt{2}$ 的相邻两点 D_2 与 D_1 之间。此时 x_i 满足: $1 \leq \left\{ \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\} \times$

$(2 + \sqrt{2}) < 2 + \sqrt{2}$, 线段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_1, D_2, \dots, D_1, D_2)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 2$ 。

情形 3 $i \equiv 2 \pmod{4}$

半弦 O_iB_i 上分布的 D -点序列为 $(D_3, D_4, D_3, D_4, \dots)$, 而相邻两点 D_3 与 D_4 之间的距离为 1 或 $1 + \sqrt{2}$, 根据 B_i 的位置不同, 分两种情形对 a_i 的取值进行讨论。

情形 3.1 B_i 位于距离为 $1 + \sqrt{2}$ 的相邻两点 D_3 与 D_4 之间。 x_i 满足: $0 \leq \left\{ \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\} \times (2 + \sqrt{2}) < 1 + \sqrt{2}$,

线段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_3, D_4, \dots, D_3, D_4, D_3)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 1$ 。

情形 3.2 B_i 位于距离为 1 的相邻两点 D_4 与 D_3 之间。 x_i 满足: $1 + \sqrt{2} \leq \left\{ \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\} \times (2 + \sqrt{2}) < 2 + \sqrt{2}$,

线段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_3, D_4, \dots, D_3, D_4)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 2$ 。

情形 4 $i \equiv 3 \pmod{4}$

半弦 O_iB_i 上分布的 D -点序列为 $(D_2, D_1, D_2, D_1, \dots)$, 而相邻两点 D_2 与 D_1 之间的距离为 1 或 $1 + \sqrt{2}$, 根据 B_i 的位置不同, 分两种情形对 a_i 的取值进行讨论。

情形 4.1 B_i 位于距离为 $1 + \sqrt{2}$ 的相邻两点 D_2 与 D_1 之间。 x_i 满足: $0 \leq \left\lfloor \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times (2 + \sqrt{2}) < 1 + \sqrt{2}$,

线段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_2, D_1, \dots, D_2, D_1, D_2)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 1$ 。

情形 4.2 B_i 位于距离为 1 的相邻两点 D_1 与 D_2 之间。 x_i 满足: $1 + \sqrt{2} \leq \left\lfloor \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times (2 + \sqrt{2}) < 2 + \sqrt{2}$,

线段 O_iB_i 的 D -点序列为 $(D_2, D_1, \dots, D_2, D_1)$, 线段 O_iB_i 上所含的 D -点数为 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 2$ 。

由上述讨论过程可以给出下述算法来计算 [4.8.8] 铺砌中椭圆 $E(n)$ 的内部和边界上所含 D -点的个数 $\mathcal{A}(n)$:

1) 设 n 为任意给定非负整数, 其中 n 为椭圆 $E(n)$ 的短半轴长, 开始输入 n , 当 n 满足: $0 \leq \left\lfloor \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\rfloor \times$

$(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 输出 $k = \left\lfloor \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\rfloor \times 2 + 1$; 当 n 满足: $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \left\lfloor \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\rfloor \times (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1) < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 输出

$k = \left\lfloor \frac{n - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} \right\rfloor \times 2 + 2$; 令初始值 $N = 0$ 。

2) 令 $x_i = 2\sqrt{n^2 - y_i^2}$ 。判断 i 的类型, 若 $i \equiv 0 \pmod{4}$, 进行步骤 3; 若 $i \equiv 1 \pmod{4}$, 进行步骤 4; 若 $i \equiv 2 \pmod{4}$, 进行步骤 5; 若 $i \equiv 3 \pmod{4}$, 进行步骤 6。

3) 计算半弦 O_iB_i 上所含的 D -点数 a_i 。令 $y_i = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$, 若 $0 \leq \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times (2 + \sqrt{2}) < 1$

时, $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 1$; 否则 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 2$, 用 $N + a_i$ 代替 N 且进行步骤 7。

4) 计算半弦 O_iB_i 上所含的 D -点数 a_i 。令 $y_i = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{i-1}{2} + \frac{1}{2}$, 若 $0 \leq \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times (2 + \sqrt{2}) < 1$

时, $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 1$; 否则 $a_i = \left\lfloor \frac{x_i - (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times 2 + 2$, 用 $N + a_i$ 代替 N 且进行步骤 7。

5) 计算半弦 O_iB_i 上所含的 D -点数 a_i 。令 $y_i = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$, 若 $0 \leq \left\lfloor \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rfloor \times (2 + \sqrt{2}) < 1 + \sqrt{2}$

时, $a_i = \left\lceil \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rceil \times 2 + 1$; 否则 $a_i = \left\lceil \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rceil \times 2 + 2$, 用 $N + a_i$ 代替 N 且进行步骤 7。

6) 计算半弦 $O_i B_i$ 上所含的 D -点数 a_i 。令 $y_i = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \times \frac{i-1}{2} + \frac{1}{2}$, 若 $0 \leq \left\lceil \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rceil \times (2 + \sqrt{2}) < 1 + \sqrt{2}$

时, $a_i = \left\lceil \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rceil \times 2 + 1$; 否则 $a_i = \left\lceil \frac{x_i - \frac{1}{2}}{2 + \sqrt{2}} \right\rceil \times 2 + 2$, 用 $N + a_i$ 代替 N 且进行步骤 7。

7) 如果 $i \leq k$, 用 $i+1$ 代替 i , 并进行步骤 2, 否则, 停止程序并输出 $N \times 4$ 。

表 1 部分 $\mathcal{N}(n)$ 的值

Tab. 1 Some values of $\mathcal{N}(n)$

n	$\mathcal{N}(n)$	$\frac{\mathcal{N}(n)}{n^2}$
10	424	4.24
20	1 724	4.31
50	10 784	4.313 6
100	43 092	4.309 2
200	172 488	4.312 2
500	1 078 016	4.312 064
1 000	4 312 004	4.312 004
2 000	17 248 420	4.312 105
5 000	107 802 432	4.312 097 28
10 000	431 209 392	4.312 093 92
20 000	1 724 838 492	4.312 096 23
50 000	10 780 242 108	4.312 096 843 2

根据上述算法, 运用 VC++ 程序, 对于任意给定 $n \in \mathbb{Z}^+$ 可以确定 $\mathcal{N}(n)$ 的值, 表 1 给出了部分 $\mathcal{N}(n)$ 的值。

4 定理 1 的证明

由表 1 所给数据可以看出, 随着椭圆的短半轴长 n 的不断增大, $\frac{\mathcal{N}(n)}{n^2}$ 的比值逐渐趋于 4.312 096...。经过计算发现, [4.8.8] 铺砌中的每个中心多边形都形如三角形 ABC , 如图 3 所示。每个三角形的面积 $S = \frac{3+2\sqrt{2}}{4}$, 则 $\frac{2\pi}{S} = \frac{8\pi}{3+2\sqrt{2}} = 8\pi(3-2\sqrt{2}) = 4.312 096...$ 。因而定

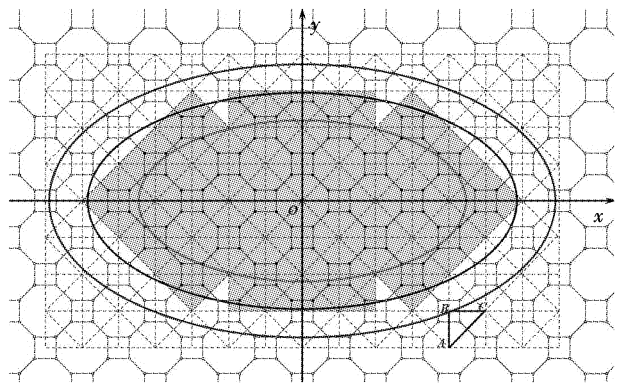


图 3 [4.8.8] 铺砌的划分

Fig. 3 Dividing of [4.8.8]-tiling

理 1 得到了验证, 即: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(n)}{n^2} = 2 \frac{\pi}{S}$ 。事实上, 用中心多边形铺砌整个平面, 则形成 [4.8.8] 铺砌的一个划分。

证明 由中心多边形的定义可知其内部和

边界上仅含有一个铺砌顶点。现以任意正八边形中心为椭圆中心、作短半轴长为正整数 n 、长半轴长为 $2n$ 的椭圆, 给椭圆所覆盖的铺砌顶点所对应的中心多边形区域着色, 那么着色的中心多边形区域面积之和为

$\mathcal{N}(n)S$ 。以坐标原点为椭圆中心、以短半轴长 $n - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ 、长半轴长 $2 \left(n - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \right)$ 的椭圆全部含于着色

区域中。类似的以坐标原点为椭圆中心、以短半轴长 $n + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ 、长半轴长 $2 \left(n + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \right)$ 的椭圆全部覆

盖着色区域,故得到下列不等式。

$$2\pi(n - \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}})^2 \leq \mathcal{N}(n)S \leq 2\pi(n + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}})^2,$$

即

$$\begin{aligned} 2\pi(n^2 - \sqrt{2(2+\sqrt{2})}n - \frac{2+\sqrt{2}}{2}) &\leq 2\pi(n^2 - \sqrt{2(2+\sqrt{2})}n + \frac{2+\sqrt{2}}{2}) \leq \\ \mathcal{N}(n)S &\leq 2\pi(n^2 + \sqrt{2(2+\sqrt{2})}n + \frac{2+\sqrt{2}}{2}), \\ 2\pi(1 - \frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{n} - \frac{2+\sqrt{2}}{2n^2}) &\leq \frac{\mathcal{N}(n)S}{n^2} \leq 2\pi(1 + \frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{n} + \frac{2+\sqrt{2}}{2n^2}), \\ -2\pi(\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{n} + \frac{2+\sqrt{2}}{2n^2}) &\leq \frac{\mathcal{N}(n)S}{n^2} - 2\pi \leq 2\pi(\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{n} + \frac{2+\sqrt{2}}{2n^2}), \\ \left| \frac{\mathcal{N}(n)S}{n^2} - 2\pi \right| &\leq 2\pi(\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{n} + \frac{2+\sqrt{2}}{2n^2}), \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi(\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}}{n} + \frac{2+\sqrt{2}}{2n^2}) = 0,$$

由极限的性质知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(n)S}{n^2} = 2\pi$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(n)}{n^2} = \frac{2\pi}{S}$, 上述定理得证。

5 定理 1 的推广

经过对定理 1 的证明过程研究发现,在[4.8.8]铺砌中,当其他条件不变,椭圆的长半轴长为 mn 、短半轴长为 n 时,通过定理 1 的类似证明可以得到下述定理。

定理 2 在[4.8.8]阿基米德铺砌中,设 $E(n)$ 为以正八边形中心为椭圆中心、以正整数 n 为短半轴长的椭圆。 $E(n)$ 的内部和边界上所含 D -点的个数为 $\mathcal{N}(n)$, 则: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(n)}{n^2} = m \frac{\pi}{S}$, 其中 S 为对应铺砌的中心多边形的面积, m 为椭圆的长半轴长与短半轴长的比值。

不管椭圆 $E(n)$ 是以正八边形中心为椭圆中心、还是以正方形中心为椭圆中心、又或者是以任意顶点为椭圆中心,当 n 趋向于无穷时, $\mathcal{N}(n)/n^2$ 恒趋于 $m\pi/S$ 。而当 $m=1$ 时,得到在[4.8.8]铺砌中以任意顶点或者正多边形中心为圆心、以半径为 n 的圆上或内部顶点数的类似公式: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(n)}{n^2} = \frac{\pi}{S}$, 其中 S 仍为对应铺砌的中心多边形的面积。

6 结 语

本文研究了在[4.8.8]阿基米德铺砌中椭圆内及其边界上的铺砌顶点数计数问题。证明了当椭圆的短半轴长为正整数 n , 且长半轴长与短半轴长的比值一定时,椭圆内及其边界上的总顶点数与短半轴长的平方的比值极限始终是一个常数。那么我们就不难发现,当椭圆的短半轴长为任意正数,且长半轴长与短半轴长的比值给定时,椭圆的内部或边界上的总顶点数与短半轴长的关系与定理 2 是相同的,相关证明可由数学分析两边夹定理推导证得。

参考文献/References:

- [1] GRUBER P. Convex and Discrete Geometry [M]. New York: Springer, 2007.
- [2] GRUNBAUM B, SHEPHARD G C. Tilings and Patterns [M]. New York: W H Freeman & Co, 1986.
- [3] CAO P, YUAN L. The number of H -points in a circle [J]. Ars Combinatoria, 2010, 97A: 311-318.
- [4] WEI X, WANG J, GAO F. A note area of lattice polygons in an Archimedean tiling [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2015, 48(1): 573-584.

- [5] 张红玉. 关于一类双铺砌顶点性质的研究 [D]. 石家庄:河北师范大学,2010.
ZHANG Hongyu. Some Properties on the Vertices of a Dihedral Tiling[D]. Shijiazhuang: Hebei Normal University, 2010.
- [6] DING R, REAY J R. The boundary characteristic and Pick's theorem in the Archimedean planar tilings [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1987, 44(1): 110-119.
- [7] WEI X, DING R. On the interior lattice points of convex lattice 11-gon [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 30(1): 193-199.
- [8] DING R, KOLODZIEJCZYK K, MURPHY G, et al. A Pick-type approximation for areas of H -polygons [J]. American Mathematical Monthly, 1993, 100(7): 669-673.
- [9] KOLODZIEJCZYK K, OLSZEWSKA D. On some conjectures by Rabinowitz [J]. Ars Combinatoria, 2006, 79: 171-188.
- [10] DING R, REAY J R, ZHANG J R. Areas of generalized H -polygons [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1997, 77(2): 304-317.
- [11] WEI X, DING R. H -triangles with 3 interior H -points [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2008, 27(1/2): 117-123.
- [12] WEI X, DING R. H -triangles with k interior H -points [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(24): 6015-6021.
- [13] WEI X, DING R. Lattice polygons with two interior lattice points [J]. Mathematical Notes, 2012, 91(5): 868-877.
- [14] KOLODZIEJCZYK K, OLSZEWSKA D. A proof of Coleman's conjecture [J]. Discrete Mathematics, 2007, 307(115): 1865-1872.
- [15] KOLODZIEJCZYK K. Areas of lattice figures in the planar tilings with congruent regular polygons [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1991, 58(1): 115-126.
- [16] KOLODZIEJCZYK K. The boundary characteristic and the volume of lattice polyhedra [J]. Discrete Mathematics, 1998, 190(1/2/3): 137-148.
- [17] KOLODZIEJCZYK K, REAY J. Polynomials and spstial Pick-type theorems [J]. Expositiones Mathematicae, 2008, 26(1): 41-53.
- [18] KOLODZIEJCZYK K. Parity properties and terminal points for lattice walks with steps of equal length [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 355(1): 363-368.
- [19] KOLODZIEJCZYK K. Hex-triangles with one interior H -points [J]. Ars Combinatoria, 2004, 70: 33-45.
- [20] OLDS C, LAX A, DAVIDOFF G. The Geometry of Numbers [M]. London: Springer London, 2001.

向本期载文的审稿专家致谢

本期《河北科技大学学报》共发表论文 16 篇。这些论文的发表是与有关专家的认真审读、细查资料、推敲分析、中肯评价分不开的。对此,本编辑部特向这些专家表示敬意,对他们的辛勤劳动表示感谢。本期载文的审稿专家名单如下(按姓名的汉语拼音顺序排列):

郝爱友 江卫华 姜保军 金葆康 金健 李平 李铁军 李永刚
李宗桃 刘坚 刘金海 刘丽莉 刘永 卢少武 马履中 倪受东
乔宝明 任家东 容跃堂 史永堂 宋水山 唐秋华 王春明 吴晔
邢书明 杨军 姚卫 姚颖悟 苑立平 翟成波 张斌 张俊

(本刊编辑部)