文章编号:1008-1542(2017)02-0137-06 doi:10.7535/hbkd.2017yx02006

一类交叉耦合抛物型方程组解的渐近性态

薛应珍

(西安外事学院商学院,陕西西安 710077)

摘 要:为了更好地描述3种混合物质燃烧的热传导过程,即3种化学反应中反应物的反应情况,研究了一类具有3个变量交叉耦合且带有非局部源及非局部边界流抛物型方程组解的整体存在和有限时刻爆破问题,打破常用的第一特征值的构造上下解的方法,采用常微分方程方法构造了该方程组的上下解,引用比较定理,证明得到了由幂函数局部源和指数函数非局部源交叉耦合的退化抛物型方程组解的整体存在及解在有限时刻爆破的充分条件,为热传导和化学反应问题提供了理论支持。

关键词:抛物型偏微分方程;比较原理;整体存在;爆破;热传导

中图分类号:O175.26 **MSC(2010)主题分类:**35K46 **文献标志码:**A

Asymptotic behavior for cross coupled parabolic equations

XUE Yingzhen

(Business School, Xi'an International University, Xi'an, Shaanxi 710077, China)

Abstract: In order to better describe the heat transfer process of three kinds of mixed substances, namely the reaction of the reactants in the three chemical reactions, a class of three variable cross coupling with non parabolic equations of the whole existence of local source and non local boundary flow and the finite time blow up problem with breaking method for the solution of the first commonly used feature value structure are studied. The structure of the equations of the upper and lower solutions by using the method of ordinary differential equation reference is broken, with comparison theorem, the proof shows that obtained by local source power function and exponential function of parabolic equations is broken, with the sufficient conditions for global existence of clegerate purubolic equations solutions cross coupled by local source power function and non local sources exponential function are proved, as soon as the solution of blowing up in finite time degradation of non local sources of cross coupling, providing better support for the theory of heat transfer and chemical reaction problem.

Keywords: the parabolic partial differential equations; comparison principle; global existence; blow-up question; conduction of heat

针对交叉耦合抛物方程组解的渐近性态问题,文献[1]研究了如下具有3个变量交叉耦合的局部源和非局部边界抛物型方程组解的渐近性态,得到了解整体存在及有限时刻爆破的充分条件。

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + a z^p(x,t), \\ v_t = \Delta v^n + b w^q(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0; \\ w_t = \Delta w^h + c u^r(x,t), \end{cases}$$

收稿日期:2016-11-18;修回日期:2016-12-27;责任编辑:张 军

基金项目:陕西省自然科学基础研究计划项目(2016JM1036);陕西省教育厅科学研究计划项目(15JK2134);西安外事学院高等教育教学改革研究项目(2015B04)

作者简介:薛应珍(1980—),男,甘肃庆阳人,副教授,硕士,主要从事偏微分方程理论及应用方面的研究。

E-mail:xueyingzhen@126.com

薛应珍.一类交叉耦合抛物型方程组解的渐近性态[J].河北科技大学学报,2017,38(2):137-142.

XUE Yingzhen. Asymptotic behavior for cross coupled parabolic equations[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2017,38(2):137-142.

$$\begin{cases}u(x,t)=\int_\Omega \eta_1(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y,\\ z(x,t)=\int_\Omega \eta_2(x,y)z(y,t)\mathrm{d}y, \quad x\in\partial\Omega,\ t>0;\\ w(x,t)=\int_\Omega \eta_3(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y,\end{cases}$$

$$u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),x\in\Omega。$$

文献[2]研究了具有2个幂函数作为局部源耦合抛物型方程组解的性质，得到了方程组解局部存在，整体存在和全局爆破的充分条件。文献[3]将文献[2]的结论推广到了3个变量的情形。文献[4—6]研究了具有幂函数耦合非局部源和边界流抛物型方程组解的整体存在及有限时刻爆破的充分条件。文献[7]研究了如下具有幂函数和指数函数交叉耦合的非局部源拟线性抛物型方程组的一致爆破模式，得到了解在有限时刻爆破的充分条件及同时爆破的一个必要条件。

$$\begin{cases}u_t=\Delta u^{m_1}+\int_\Omega v^\beta \mathrm{e}^{\alpha u}\mathrm{d}x, x\in\Omega,\\ v_t=\Delta v^{m_2}+\int_\Omega u^p \mathrm{e}^{q v}\mathrm{d}x, x\in\Omega, \quad t>0,\\ u(x,t)=v(x,t)=0, x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

$$u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),\ x\in\Omega。$$

对具有非局部吸收源等交叉耦合抛物型方程组解的渐近性态研究，参见文献[8—19]。

基于以上工作，本文研究了如下由幂函数局部源和指数函数非局部源交叉耦合，且具有3个变量交叉耦合退化抛物型方程组解的整体存在及解在有限时刻爆破的充分条件。

$$\begin{cases}u_t=\Delta u^m+v^{\alpha_1}\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta_1 w}\mathrm{d}x,\\ v_t=\Delta v^n+w^{\alpha_2}\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta_2 u}\mathrm{d}x, \quad x\in\Omega,\ t>0。\\ w_t=\Delta w^h+u^{\alpha_3}\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta_3 v}\mathrm{d}x,\end{cases} \tag{1}$$

具有边界流：

$$\begin{cases}u(x,t)=\int_\Omega \varphi_1(x,y)u(y,t)\mathrm{d}y,\\ v(x,t)=\int_\Omega \varphi_2(x,y)v(y,t)\mathrm{d}y, \quad x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ w(x,t)=\int_\Omega \varphi_3(x,y)w(y,t)\mathrm{d}y,\end{cases} \tag{2}$$

及初值：

$$u(x,0)=u_0(x),v(x,0)=v_0(x),w(x,0)=w_0(x),x\in\Omega, \tag{3}$$

式中：$\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是有界光滑区域，$m,n,h>1$，$\alpha_i>0$，$\beta_i\in\mathbf{R}$，$\varphi_i(x,y)$，$i=1,2,3$，是 $\partial\Omega\times\Omega$ 上的非负连续函数，初值 $u_0(x),v_0(x)\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$，$0<\alpha<1$，非负，且在边界上满足相容条件。

1 基本理论

首先给出2种情况下上、下解的定义。

定义1 令 $T>0$，正函数 $\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t),\bar{w}(x,t)\in C^{1,0}(\bar{\Omega}\times[0,T))\cap C^{2,1}(\Omega\times[0,T))$，且满足：

$$\begin{cases}\bar{u}_t\geqslant\Delta\bar{u}^m+\bar{v}^{\alpha_1}\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta_1\bar{w}}\mathrm{d}x,\\ \bar{v}_t\geqslant\Delta\bar{v}^n+\bar{w}^{\alpha_2}\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta_2\bar{u}}\mathrm{d}x, \quad x\in\Omega,\ t>0。\\ \bar{w}_t\geqslant\Delta\bar{w}^h+\bar{u}^{\alpha_3}\int_\Omega \mathrm{e}^{\beta_3\bar{v}}\mathrm{d}x,\end{cases} \tag{4}$$

具有如下边界流：

$$\begin{cases}\bar{u}(x,t)\geqslant\int_{\Omega}\varphi_1(x,y)\bar{u}(y,t)\mathrm{d}y,\\ \bar{v}(x,t)\geqslant\int_{\Omega}\varphi_2(x,y)\bar{v}(y,t)\mathrm{d}y,\quad x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ \bar{w}(x,t)\geqslant\int_{\Omega}\varphi_3(x,y)\bar{w}(y,t)\mathrm{d}y,\end{cases}\tag{5}$$

及初值：

$$\bar{u}(x,0)\geqslant u_0(x),\bar{v}(x,0)\geqslant v_0(x),\bar{w}(x,0)\geqslant w_0(x),x\in\Omega,\tag{6}$$

其中，$m,n,h>1,\alpha_i,\beta_i>0(i=1,2,3)$，则称$(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t),\bar{w}(x,t))$为方程组(1)—方程组(3)的上解。若改变不等号方向，类似地，可以定义方程组的下解。

定义 2　若定义 1 中式(4)变为

$$\begin{cases}\bar{u}_t\geqslant\Delta\bar{u}^m+\bar{v}^{\alpha_1}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta_1\underline{w}}\mathrm{d}x,\\ \bar{v}_t\geqslant\Delta\bar{v}^n+\bar{w}^{\alpha_2}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta_2\underline{u}}\mathrm{d}x,\quad x\in\Omega,\ t>0,\\ \bar{w}_t\geqslant\Delta\bar{w}^h+\bar{u}^{\alpha_3}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta_3\underline{v}}\mathrm{d}x,\end{cases}\tag{7}$$

可得 $m,n,h>1,\alpha_i>0,\beta_i<0(i=1,2,3)$，情形下，方程组(1)－方程组(3)的上解，若改变不等号方向，可定义其下解。

由文献[20]，有如下比较引理。

引理 1　设$(\bar{u}(x,t),\bar{v}(x,t),\bar{w}(x,t))$和$(\underline{u}(x,t),\underline{v}(x,t),\underline{w}(x,t))$是方程组(1)—方程组(3)在$\bar{\Omega}\times[0,T)$上的一对有序上下解，则方程组(1)—方程组(3)存在唯一古典解$(u(x,t),v(x,t),w(x,t))$在$\bar{\Omega}\times[0,T)$上有定义且满足：

$$\underline{u}(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\bar{u}(x,t),\underline{v}(x,t)\leqslant v(x,t)\leqslant\bar{v}(x,t),\underline{w}(x,t)\leqslant w(x,t)\leqslant\bar{w}(x,t)。\tag{8}$$

引理 2　设$(\underline{u}(x,t),\underline{v}(x,t),\underline{w}(x,t))>(0,0,0)$是式(1)的下解，如果$(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$在有限时刻爆破，则方程组(1)－方程组(3)的解$(u(x,t),v(x,t),w(x,t))$在有限时刻爆破。

2　解的整体存在

讨论方程组(1)－方程组(3)解的整体存在问题时，设 $\alpha_i>0,\beta_i<0(i=1,2,3)$，引用定义 2 来证明方程组(1)－方程组(3)解整体存在的充分条件。

定理 1　若 $mnh>\alpha_1\alpha_2\alpha_3$，当初值 $u_0(x),v_0(x),w_0(x)$ 充分小时，方程组(1)－方程组(3)的解整体存在。

证明　设 $\varphi(x)$ 满足：

$$\begin{cases}-\Delta\varphi=\varepsilon_0,\ x\in\Omega,\\ \varphi(x)=\int_{\Omega}\tau(x,y)\mathrm{d}y,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{9}$$

其中，$\tau(x,y)=\max\{\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y),\varphi_3(x,y),\varphi_i(x,y)\neq0,i=1,2,3\}$是定义在$\partial\Omega\times\Omega$上的非负连续函数，存在 $\varepsilon_0>0$ 使 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant1$，记 $K_1=\max\limits_{x\in\Omega}\varphi(x),K_2=\min\limits_{x\in\Omega}\varphi(x)$，构造如下上下解：

$$\bar{u}=a\varphi^{1/m}(x),\bar{v}=a\varphi^{1/n}(x),\bar{w}=a\varphi^{1/h}(x),\underline{u}(x,t)=0,\underline{v}(x,t)=0,\underline{w}(x,t)=0。$$

联立式(7)－式(9)，得到：

$$\bar{u}_t-\Delta\bar{u}^m-\bar{v}^{\alpha_1}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta_1\underline{w}}\mathrm{d}x=a^m\varepsilon_0-b^{\alpha_1}\varphi^{\frac{\alpha_1}{n}}(x)\int_{\Omega}\mathrm{d}x\geqslant a^m\varepsilon_0-b^{\alpha_1}K_1^{\frac{\alpha_1}{n}}\Omega,$$

类似地有：

$$\bar{v}_t-\Delta\bar{v}^n-\bar{w}^{\alpha_2}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta_2\underline{u}}\mathrm{d}x\geqslant b^n\varepsilon_0-c^{\alpha_2}K_1^{\frac{\alpha_2}{h}}\Omega,$$

$$\bar{w}_t-\Delta\bar{w}^h-\bar{u}^{\alpha_3}\int_{\Omega}\mathrm{e}^{\beta_3\underline{v}}\mathrm{d}x\geqslant c^h\varepsilon_0-\alpha^{\alpha_3}K_1^{\frac{\alpha_3}{m}}\Omega。$$

在边界上：

$$\bar{u}_{\partial\Omega} = a(\int_{\Omega}\tau(x,y)\mathrm{d}y)^{\frac{1}{m}} \geqslant$$

$$a\int_{\Omega}\tau(x,y)\mathrm{d}y \geqslant a\int_{\Omega}\varphi_1(x,y)\mathrm{d}y \geqslant a\int_{\Omega}\varphi_1(x,y)\varphi^{\frac{1}{m}}(x)\mathrm{d}y =$$

$$\int_{\Omega}\varphi_1(x,y)\bar{u}(x,y)\mathrm{d}y。$$

类似地有：

$$\bar{v}_{\partial\Omega} \geqslant \int_{\Omega}\varphi_2(x,y)\bar{v}(x,y)\mathrm{d}y,\ \bar{w}_{\partial\Omega} \geqslant \int_{\Omega}\varphi_3(x,y)\bar{w}(x,y)\mathrm{d}y。$$

在初值上：

$$\bar{u}(x,0) = a\varphi^{1/m}(x) \geqslant aK_2^{1/m},\ \bar{v}(x,0) = a\varphi^{1/n}(x) \geqslant aK_2^{1/n},\ \bar{w}(x,0) = a\varphi^{1/h}(x) \geqslant aK_2^{1/h},$$

综上，只要证明存在 a,b,c，使得：

$$a^m\varepsilon_0 - b^{\alpha_1}K_1^{\frac{\alpha_1}{n}}\Omega \geqslant 0, b^n\varepsilon_0 - c^{\alpha_2}K_1^{\frac{\alpha_2}{h}}\Omega \geqslant 0, c^h\varepsilon_0 - a^{\alpha_3}K_1^{\frac{\alpha_3}{m}}\Omega \geqslant 0, \tag{10}$$

$$aK_2^{1/m} \geqslant u_0(x),\ bK_2^{1/n} \geqslant v_0(x),\ cK_2^{1/h} \geqslant w_0(x) \tag{11}$$

成立，由引理 1 知，方程组(1)— 方程组(3) 的解整体存在。

下面证以上的 a,b,c 存在。令 $b^{\alpha_1} = a^m\varepsilon_0K_1^{\frac{\alpha_1}{n}}\Omega^{-1}$，可得 $b = a^{\frac{m}{\alpha_1}}\varepsilon_0^{\frac{1}{\alpha_1}}K_1^{-\frac{1}{n}}\Omega^{-\frac{1}{\alpha_1}}$，由式(10) 中第 3 项可得，$c \geqslant a^{\frac{\alpha_3}{h}}\varepsilon_0^{-\frac{1}{h}}K_1^{\frac{\alpha_3}{mh}}\Omega^{\frac{1}{h}}$，将其代入式(10) 中第 2 项，得到关于 a 的不等式

$$a^{(mnh-\alpha_1\alpha_2\alpha_3)/\alpha_1 h} \geqslant \varepsilon_0^{-(n/\alpha_1+\alpha_2/h+1)}K_1^{(1+\alpha_2/h+\alpha_2\alpha_3/mh)}\Omega^{(n/\alpha_1+\alpha_2/h+1)}。 \tag{12}$$

由定理 1 条件 $mnh > \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 可知，当 a 充分大时式(12) 成立。另当 a,b,c 充分大，存在小初值 $u_0(x)$，$v_0(x)$，$w_0(x)$，使得式(11) 成立，定理 1 证毕。

3 解的有限时刻爆破

讨论解的有限时刻问题时，设 $\alpha_i,\beta_i > 0, i = 1,2,3$，引用定义 1 来证明方程组(1)— 方程组(3) 解有限时刻爆破的充分条件。首先引入以下引理。

引理 3 设 $\theta > \lambda > 1, k, l > 0, h(t)$ 是问题

$$\begin{cases} h'(t) = -kh^{\lambda}(t) + lh^{\theta}(t),\ t > 0, \\ h(0) = h_0 > 0 \end{cases} \tag{13}$$

的正解，则当 h_0 充分大时，$h(t)$ 在有限时刻爆破。

引理 4 设 $\lambda_2 > \lambda_1 > 1, \theta_2 > \theta_1 > 1$，则存在如引理 3 的 $h(t)$ 是满足：

$$\begin{cases} h'(t) \leqslant -kh^{\lambda_1}(t) + lh^{\lambda_2}(t), \\ h'(t) \leqslant -kh^{\theta_1}(t) + lh^{\theta_2}(t)。 \end{cases}$$

引理 3 及引理 4 证明见文献[5]。

定理 2 如果 $mnh < \alpha_1\alpha_2\alpha_3$，则当初值 $u_0(x), v_0(x), w_0(x)$ 充分大时，方程组(1)— 方程组(3) 的解在有限时刻爆破。

证明 设 $\varphi(x)$ 是满足方程：

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = 1,\ x \in \Omega, \\ \varphi(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{14}$$

的解，则存在 $C > 0$，使得 $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant C$。令

$$\underline{u}(x,t) = h^{l_1}(t)\varphi^{l_1}(x),\ \underline{v}(x,t) = h^{l_2}(t)\varphi^{l_2}(x),\ \underline{w}(x,t) = h^{l_3}(t)\varphi^{l_3}(x),$$

其中，$l_1, l_2, l_3 > 1$，$h(t)$ 待定，由式(13) 及式(14) 可知，$h(t)\varphi(x) > 1$，显然，$h^{l_i}(t)\varphi^{l_i}(x) > 1, i = 1,2,3$，则对于任意正实数 η，利用拉格朗日中值定理证明可知，

$$\mathrm{e}^{\eta h^{l_i}(t)\varphi^{l_i}(x)} > \eta\,\mathrm{e}h^{l_i}(t)\varphi^{l_i}(x) > \eta\,\mathrm{e}\ln^{l_i}[1 + h(t)\varphi(x)]。$$

记 $k = \max\{m(l_1m-1)C^{l_1(m-1)-2}, n(l_2n-1)C^{l_2(n-1)-2}, h(l_3h-1)C^{l_3(h-1)-2}\}$，

$$l = \min\{\frac{\mathrm{e}\beta_1\ln^{l_2\alpha_1}(1+C)}{l_1C^{l_1}}\int_{\Omega}\varphi^{l_3}(x)\mathrm{d}x, \frac{\mathrm{e}\beta_2\ln^{l_3\alpha_2}(1+C)}{l_2C^{l_2}}\int_{\Omega}\varphi^{l_1}(x)\mathrm{d}x, \frac{\mathrm{e}\beta_3\ln^{l_1\alpha_3}(1+C)}{l_3C^{l_3}}\int_{\Omega}\varphi^{l_2}(x)\mathrm{d}x\},$$

则

$$\underline{u}_t-\Delta\,\underline{u}^m-\underline{v}^{\alpha_1}\int_\Omega e^{\beta_1\underline{w}}dx=$$

$$l_1h^{l_1-1}(t)\varphi^{l_1}(x)h'(t)-l_1m(l_1m-1)h^{l_1m}(t)\varphi^{l_1m-2}(x)\Delta\varphi(x)-h^{l_2\alpha_1}(t)\varphi^{l_2\alpha_1}(x)\int_\Omega e^{\beta_1h^{l_3}(t)\varphi^{l_3}(t)}dx\leqslant$$

$$l_1h^{l_1-1}(t)\varphi^{l_1}(x)h'(t)+l_1m(l_1m-1)h^{l_1m}(t)\varphi^{l_1m-2}(x)-h^{l_2\alpha_1}(t)\varphi^{l_2\alpha_1}(x)\int_\Omega e\beta_1h^{l_3}(t)\varphi^{l_3}(t)dx=$$

$$l_1h^{l_1-1}(t)\varphi^{l_1}(x)\left[h'(t)+m(l_1m-1)h^{l_1m-l_1+1}(t)\varphi^{l_1m-l_1-2}(x)-\frac{e\beta_1h^{l_2\alpha_1+l_3-l_1+1}(t)\varphi^{l_2\alpha_1}(x)}{l_1\varphi^{l_1}(x)}\int_\Omega\varphi^{l_3}(x)dx\right]=$$

$$l_1h^{l_1-1}(t)\varphi^{l_1}(x)\left[h'(t)+m(l_1m-1)h^{l_1m-l_1+1}(t)C^{l_1m-l_1-2}-\frac{e\beta_1h^{l_2\alpha_1+l_3-l_1+1}(t)\ln^{l_2\alpha_1}(1+C)}{l_1C^{l_1}}\int_\Omega\varphi^{l_3}(x)dx\right]\leqslant$$

$$l_1h^{l_1-1}(t)\varphi^{l_1}(x)\left[h'(t)+kh^{l_1(m-1)+1}(t)-lh^{l_2\alpha_1+l_3-l_1+1}(t)\right]。$$

同理，

$$\underline{v}_t-\Delta\,\underline{v}^n-\underline{w}^{\alpha_2}\int_\Omega e^{\beta_2\underline{u}}dx\leqslant l_2h^{l_2-1}(t)\varphi^{l_2}(x)\left[h'(t)+kh^{l_2(n-1)+1}(t)-lh^{l_3\alpha_2+l_1-l_2+1}(t)\right]。$$

$$\underline{w}_t-\Delta\,\underline{w}^h-\underline{u}^{\alpha_2}\int_\Omega e^{\beta_2\underline{v}}dx\leqslant l_3h^{l_3-1}(t)\varphi^{l_3}(x)\left[h'(t)+kh^{l_3(h-1)+1}(t)-lh^{l_1\alpha_3+l_2-l_3+1}(t)\right]。$$

综上由引理 3 的条件可知，只要存在 l_1,l_2,l_3 使得：

$$\begin{cases}l_2\alpha_1+l_3-l_1+1>l_1(m-1)+1,\\ l_3\alpha_2+l_1-l_2+1>l_2(n-1)+1,\\ l_1\alpha_3+l_2-l_3+1>l_3(h-1)+1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l_2\alpha_1+l_3>l_1m,\\ l_3\alpha_2+l_1>l_2n,\\ l_1\alpha_3+l_2>l_3h,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l_2\alpha_1>l_1m,\\ l_3\alpha_2>l_2n,\\ l_1\alpha_3>l_3h\end{cases}\tag{15}$$

成立，则由引理 4 知，存在满足引理 3 的 $h(t)$ 使得：

$$h'(t)\leqslant-kh^{l_1(m-1)+1}(t)+lh^{l_2\alpha_1+l_3-l_1+1}(t),$$
$$h'(t)\leqslant-kh^{l_2(n-1)+1}(t)+lh^{l_3\alpha_2+l_1-l_2+1}(t),$$
$$h'(t)\leqslant-kh^{l_3(h-1)+1}(t)+lh^{l_1\alpha_3+l_2-l_3+1}(t),$$

所以，$\underline{u}_t\leqslant\Delta\,\underline{u}^m+\int_\Omega\underline{v}^{\alpha_1}e^{\beta_1\underline{w}}dx$，$\underline{v}_t\leqslant\Delta\,\underline{v}^n+\int_\Omega\underline{w}^{\alpha_2}e^{\beta_2\underline{u}}dx$，$\underline{w}_t\leqslant\Delta\,\underline{w}^h+\int_\Omega\underline{u}^{\alpha_3}e^{\beta_3\underline{v}}dx$。

在边界上：

由式(14) 知，$\varphi(x)=0$，$x\in\partial\Omega$，有：

$$\underline{u}(x,t)=0\leqslant\int_\Omega\varphi_1(x,y)u(y,t)dy,$$

$$\underline{v}(x,t)=0\leqslant\int_\Omega\varphi_2(x,y)v(y,t)dy,$$

$$\underline{w}(x,t)=0\leqslant\int_\Omega\varphi_3(x,y)w(y,t)dy。$$

在初值上：

当初值 $u_0(x),v_0(x),w_0(x)$ 充分大时，有 $\underline{u}(x,0)=h^{l_1}(0)\varphi^{l_1}(x)\leqslant u_0(x)$，$\underline{v}(x,0)=h^{l_2}(0)\varphi^{l_2}(x)\leqslant v_0(x)$，$\underline{w}(x,0)=h^{l_3}(0)\varphi^{l_3}(x)\leqslant w_0(x)$，$x\in\Omega$。故 $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ 为方程组(1)— 方程组(3) 的下解，而 $(\underline{u},\underline{v},\underline{w})$ 在有限时刻爆破。由引理 2 知，方程组(1)— 方程组(3) 的解在有限时刻爆破。

下证满足式(14) 的 l_1,l_2,l_3 存在，取 $l_1=\dfrac{l_2\alpha_1}{m}$，代入式(15) 中第 3 项，得 $l_2>\dfrac{mhl_3}{\alpha_1\alpha_3}$，再代入式(15) 中第 2 项，得 $l_3\alpha_2>n\dfrac{mhl_3}{\alpha_1\alpha_3}$，即 $1>\dfrac{mnh}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$，由定理 2 条件知，当 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3>mnh$ 时，上式成立，定理 2 证毕。

参考文献/References：

[1] 吴春晨. 一类非局部边值条件抛物型方程组解的性质[J]. 江南大学学报(自然科学版)，2015，14(2)：222-225.

WU Chunchen. A nonlinear parabolic system with nonlocal boundary conditions[J]. Journal of Jiangnan University(Natural Science Edition)，2015，14(2)：222-225.

[2] 宋慧，曾有栋. 具有非局部边界和局部化源抛物方程组解的全局存在与爆破性[J]. 生物数学学报，2014，29(4)：711-717.

SONG Hui, ZENG Youdong. Global blow-up for a localized nonlinear parabolic system with a nonlocal boundary condition[J]. Journal of

Biomathematics，2014,29(4):711-717.

[3] 吴春晨.一类非局部边值条件抛物型方程组解的性质研究[J].郑州大学学报(理学版),2014,46(4):18-22.
WU Chunchen. The properties of solutions for a nonlinear parabolic system with nonlocal boundary conditions[J]. Journal of Zhengzhou University(Natural Science Edition) ,2014,46(4):18-22.

[4] 樊彩虹,容跃堂，房春梅,等.退化反应扩散方程组解的整体存在和有限爆破[J].纺织高校基础科学学报,2016,29(1)：35-38.
FAN Caihong,RONG Yuetang，FANG Chunmei，et al. Global existence and finite time blow-up for a degenerate reaction-diffusion system [J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities，2016,29(1):35-38.

[5] 王文海.具非局部源和非局部边界条件抛物方程组解的性质[J].中北大学学报(自然科学版),2012,33(4)：372-375.
WANG Wenhai. Properties of solution to a parabolic system with nonlocal sources and nonlocal boundary conditions[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition) ,2012,33(4):372-375.

[6] 樊彩虹,李平,郭晓霞,等.半线性反应扩散耦合系统解的整体存在与爆破[J].内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2015,44(6)：735-737.
FAN Caihong,LI Ping,GUO Xiaoxia,et al. The global existence and blow-up of solutions of the systems of semilinear reaction diffusion coupling[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University(Natural Science Edition),2015,44(6)：735-737.

[7] 王玉兰,穆春来.一类具有非局部源的拟线性抛物型方程组的一致爆破模式[J].四川大学学报(自然科学版),2008,45(5):1007-1013.
WANG Yulan，MU Chunlai. Uniform blow-up profiles for a quasilinear parabolic system with nonlocal sources[J]. Journal of Sichuan University(Natural Science Edition)，2008,45(5):1007-1013.

[8] 周泽文，凌征球.源项耦合的退化抛物型方程组解的爆破和整体存在[J].应用数学,2015，28(3)：540-548.
ZHOU Zewen，LING Zhengqiu. Blow-up and global existence of solutions to a degenerate parabolic equations coupled via nonlinear sources[J]. Mathematica Applicata，2015，28(3)：540-548.

[9] 薛应珍.一类具有非线性吸收项和边界流的抛物型方程组解的整体存在及爆破问题[J].纺织高校基础科学学报,2013,26(2):214-219.
XUE Yingzhen. Global existence and blow up problem for a parabolic equations with nonlinear absorption term and boundary flux[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities，2013,26(2):214-219.

[10] 庞凤琴,王玉兰,李慧芳. 一类带吸引项的抛物型方程在记忆边界条件下解的性质[J]. 西华大学学报(自然科学版),2016,35(2):82-87.
PANG Fengqin,WANG Yulan,LI Huifang. The properties of a parabolic equation with absorb term and memory boundary condition[J]. Journal of Xihua University(Natural Science),2016,35(2):82-87.

[11] ZHANG He,KONG Linghua，ZHANG Sining. Propagations of singularities in a parabolic system with coupling nonlocal sources[J]. Science China Mathematics,2009,52(1):181-194.

[12] LI Yuxiang,DENG Weibing,XIE Chunhong. Global existence and nonexistence for degenerate parabolic systems [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2003,55(3):233-244.

[13] DENG Weibing,LI Yuxiang,XIE Chunhong. Existence and nonexistence of global solution of some nonlocal degenerate parabolic system [J]. Agglied Mathematics Letters,2003,16(5):803-808.

[14] 张岩,宋小军.一类带非局源的退化抛物方程组解的整体存在与爆破[J].西南大学学报(自然科学版),2008,30(9):80-84.
ZHANG Yan,SONG Xiaojun. Global existence and blow-up for a degenerate parabolic systems with nonlocal source [J]. Journal of Southwest University：Natural Science Edition,2008,30(9):80-84.

[15] BUDDAL C J,DOLD J W,GALAKTIONOV V A. Global blow-up for a semilinear heat equation on a subspace [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,2015,145(5):893-923.

[16] 党苏娟,容跃堂,张航国.非局部反应扩散方程组解的整体存在与爆破[J].纺织高校基础科学学报,2013,26(4)：481-485.
DANG Sujuan,RONG Yuetang,ZHANG Hangguo. Global existence and blow-up of solution for nonlocal reaction diffusion equtions[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities,2013,26(4):481-485.

[17] 樊彩虹,李平,郭晓霞,等.具非局部源退化抛物系统解的整体存在与爆破[J].内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版),2014，43(6)：680-688.
FAN Caihong,LI Ping,GUO Xiaoxia,et al. Global existence and blow-up for a degenerate parabolic system with nonlocal sources[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University(Natural Science Edition),2014,43(6)：680-688.

[18] 樊彩虹,容跃堂.一类带非局部源的反应扩散方程组解的整体存在[J].纺织高校基础科学学报,2009,22(2)：172-176.
FAN Caihong,RONG Yuetang. Global existence for a degenerate reaction-diffusion system with nonlocal sources[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities,2009,22(2):172-176.

[19] KONG Linghua，WANG Mingxin. Global existence and blow-up of solutions to a parabolic system with nonlocal sources and boundaries [J]. Science in China Series A:Mathematics,2007,50(9):1251-1266.

[20] PAO C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations[M]. New York:Plenum Press,1992.