第 38 卷第 2 期 河 北 科 技 大 学 学 报 Vol. 38, No. 2
2017 年 4 月 Journal of Hebei University of Science and Technology Apr. 2017

文章编号:1008-1542(2017)02-0123-08 doi:10.7535/hbkd.2017yx02002

复数域上具有主生成元的四维结合代数的分类

李长洲,李海洋

(西安工程大学理学院,陕西西安 710048)

摘 要:为了给出复数域 C 上的具有主生成元的四维结合代数在同构意义下的分类,利用环论的相关知识以及主生成元所满足的方程的根的分布:有 1 个四重根、有 4 个不同的根、有 1 个三重根和 1 个单根、有 2 个不同的二重根、有 1 个二重根和 2 个不同的单根的情况,把主生成元所满足的以上每一类方程经过平移,拉伸变成较为简单的形式,采用线性代数与商代数的相关知识以及用 maple 软件进行了大量运算得出以上每类方程所表示的同构型与方程的参数选取无关,最后通过比较每类方程所代表的同构型,给出了完整的分类结果,加深了对结合代数结构的理解,对相关的研究具有一定的参考价值。

关键词:环论;结合代数;商代数;具有主生成元的四维结合代数;同构分类

中图分类号:O153 **MSC(2010)主题分类:**34B40 **文献标志码:**A

Classification of 4-dimensional associative algebras with principal generators over complex numbers

LI Changzhou, LI Haiyang

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an, Shaanxi 710048, China)

Abstract: In order to obtain the classification of 4-dimensional associative algebras with principal generators over complex number C under isostructuralism, by using the ring theory and distribution of roots of the equations satisfied by the principal generators: one quadruple root, four different roots, one triple root and one simple root, two different double roots, one double root and two different simple roots, the above equations are translated and stretched, then the more simple equations are obtained. By using linear algebras, quotient algebras and maple to make a large number of operations, it is concluded that each isomorphism type has nothing to do with parameters. Finally by comparing each isomorphism type, the complete classification is obtained, which deepens the realization of structure of asso ciative algebra, and provides reference for relative study.

Keywords: ring theory; associative algebras; quotient algebras; 4-dimensional associative algebras with principal generators; isomorphism classification

抽象代数学研究的一个中心任务是对各种代数结构做同构意义下的分类。例如,有限单群的分类[1],主理想整环上有限生成模的结构定理[2]等。结合代数[3-6]这种结构早在凯莱提出矩阵代数时就已经有人开始

收稿日期:2016-09-29;修回日期:2016-11-28;责任编辑:张 军

基金项目:国家自然科学基金(11271297);西安工程大学研究生创新基金(CX201625)

第一作者简介:李长洲(1989—),男,陕西汉中人,硕士研究生,主要从事拓扑学方面的研究。

通信作者:李海洋教授。E-mail:fplihaiyang@126.com

李长洲,李海洋.复数域上具有主生成元的四维结合代数的分类[J].河北科技大学学报,2017,38(2):123-130.

LI Changzhou, LI Haiyang. Classification of 4-dimensional associative algebras with principal generators over complex numbers[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2017, 38(2): 123-130.

研究，目的是刻画各种结合代数的结构和表示。低维结合代数[7-15]的研究一直是大家关注的一个热门课题，文献[16]研究了代数闭域 K 上的二维结合代数的分类，具体结果如下：在该结合代数上存在一组基底 $\{e,u\}$，满足 $u^2=u$ 或者 $u^2=0$。文献[17]研究了域 K 上三维结合代数的分类，文献[18]研究了代数闭域上三维非交换代数的分类，文献[19]研究了 F_p 域上的四维结合代数的分类，文献[20]研究了代数闭域上的含幺元的五维结合代数的分类。

本文对复数域 C 上具有主生成元的四维结合代数做出分类，这种代数结构取决于主生成元满足的方程 $f(x)=x^4-px^3-qx^2-rx-s=0$ 的根的情况，由代数学基本定理知该方程有 4 个根，由于存在重根，此方程的根一共有 5 种情况：有 1 个四重根；有 4 个不同的根；有 1 个三重根和 1 个单根；有 2 个不同的二重根；有 1 个二重根和 2 个不同的单根。

1 背景知识

定义 1[4] 设 M 是域 K 上的向量空间，又在 M 上定义了一个乘法运算，称 M 是域 K 上的结合代数，当 M 满足以下条件，$\forall\alpha,\beta,\gamma\in M,k\in K$ 有：

$$\begin{cases}\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,\\(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma,\\(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),\\k(\alpha\beta)=(k\alpha)\beta=\alpha(k\beta),\end{cases}$$

当 M 中乘法运算满足交换律时，即 $\forall\alpha,\beta\in M$，有 $\alpha\beta=\beta\alpha$，称 M 是交换结合代数。当存在元素 $e\in A$，$\forall\alpha\in A$，有 $e\alpha=\alpha e=\alpha$，称 e 是 M 中的幺元，M 是含幺元的结合代数。

定义 2[4] 向量空间 M 的维数称为域 K 上的结合代数 M 的维数。

定义 3[4] 设 M 是域 K 上的 n 维结合代数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 M 的一组基底，于是有 $\alpha_i\alpha_j=\sum\limits_{k=1}^{n}C_{i,j}^{k}\alpha_k$，称 $\{C_{i,j}^{k}\mid 1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$ 为 M 对于基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的结构常数。

定义 4[4] 设 M_1 和 M_2 是域 K 上的结合代数，称 M_1 同构于 M_2，记为 $M_1\cong M_2$，当存在一个从 M_1 到 M_2 的线性同构 φ，满足 $\forall\alpha,\beta\in M$ 有 $\varphi(\alpha\beta)=\varphi(\alpha)\varphi(\beta)$。

定义 5[4] 设 M 是域 K 上的含幺元 e 的四维结合代数，如果在 M 存在一个元素 α，使得 $e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3$ 是 M 的一组基底，称 α 是主生成元，M 是含主生成元的结合代数。这时有 $\alpha^4=p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+se$，$p,q,r,s\in K$，显然 M 是交换的。

引理 1 设 M_1 和 M_2 是域 K 上的具有主生成元的结合代数，若存在主生成元满足相同的方程，则$M_1\cong M_2$。

2 坐标变换下的粗分类

笔者利用简单的线性变换对复数域上四维具有主生成元的代数 M 进行粗分类，设 $\alpha\in M$，使得 $e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3$ 线性无关，则 α 是主生成元，后面用 1 表示 e。设 $x^4=px^3+qx^2+rx+se$ 是 α 满足的方程，即 α 满足方程 $f(x)=x^4-px^3-qx^2-rx-s=0$。

1）当 $f(x)=0$ 有 1 个四重根 a，即 $f(x)=(x-a)^4=0$，$a\in C$。令 $x'=x-a$，显然 $1,x',x'^2,x'^3$ 也是 M 的一组基底，这是因为

$$[1,x',x'^2,x'^3]=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1&-a&a^2&a^3\\0&1&-2a&3a^2\\0&0&1&-3a\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

由于过渡矩阵可逆，所以 $1,x',x'^2,x'^3$ 是 M 的一组基底，因此 x' 也是 M 的主生成元，由上述知 $x'^4=0$，仍用 x 来表示主生成元，这时的代数记作 M_1，则 $M_1=C[x]/(x^4)$。

2) 当 $f(x)=0$ 有 1 个三重根 a 和 1 个单根 b，即 $f(x)=(x-a)^3(x-b)=0, a\neq b, a,b\in C$。

令 $x'=\dfrac{x-a}{b-a}$，则 $1,x',x'^2,x'^3$ 也是 M 的一组基底，这是因为

$$[1,x',x'^2,x'^3]=[1,x,x^2,x^3]\begin{bmatrix}1 & \dfrac{-a}{b-a} & \dfrac{a^2}{(b-a)^2} & \dfrac{-a^3}{(b-a)^3}\\ 0 & \dfrac{1}{b-a} & \dfrac{-2a}{(b-a)^2} & \dfrac{3a^2}{(b-a)^3}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{(b-a)^2} & \dfrac{-3a}{(b-a)^3}\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{(b-a)^3}\end{bmatrix},$$

由于过渡矩阵可逆，所以 $1,x',x'^2,x'^3$ 是 M 的一组基底。由上述可得 $x'^3(x'-1)=0$。仍用 x 来表示主生成元，此时的代数记作 M_2，则 $M_2=C[x]/(x^3(x-1))$。

3) 当 $f(x)=0$ 有 2 个不同的二重根 a,b，即 $f(x)=(x-a)^2(x-b)^2=0, a,b\in C$。

令 $x'=\dfrac{x-a}{b-a}$，则 $1,x',x'^2,x'^3$ 也是 M 的一组基底，理由同 2) 一样，可得 $x'^2(x'-1)^2=0$，仍用 x 来表示主生成元，此时的代数记作 M_3，则 $M_3=C[x]/(x^2(x-1)^2)$。

4) 当 $f(x)=0$ 有 1 个二重根 a 和 2 个单根 b,c，即 $f(x)=(x-a)^2(x-b)(x-c)=0, a,b,c\in C$。

令 $x'=\dfrac{x-a}{b-a}$，则 $1,x',x'^2,x'^3$ 也是 M 的一组基底，理由同 2) 一样，可得 $x'^2(x'-1)(x'-\dfrac{c-a}{b-a})=0$，仍用 x 来表示主生成元，此时的代数记作 M_4。则 $M_4=C[x]/(x^2(x-1)(x-d)), d\neq 0,1$。

5) 当 $f(x)=0$ 有 4 个不同的根 a,b,c,d，即 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0, a,b,c,d\in C$。

令 $x'=\dfrac{x-a}{b-a}$，则 $1,x',x'^2,x'^3$ 也是 M 的一组基底，理由同 2) 一样，可得 $x'(x'-1)(x'-\dfrac{c-a}{b-a})\times(x-\dfrac{d-a}{b-a})=0$，仍用 x 来表示主生成元，此时的代数记作 M_5，则 $M_5=C[x]/(x(x-1)(x-d)(x-f))$，$d\neq f, d,f\neq 0,1$。

综合上面的讨论可知 4) 和 5) 可能由于 d,f 的不同取值存在不同的同构类型，所以需要进一步的讨论。

3　可能的分类代表元

引理 2　$C[x]/(x^2(x-1)(x-a))\cong C[t]/(t^2(t-1)(t+1)), a\neq 0,1$。

证明　令 $\varphi: C[x]/(x^2(x-1)(x-a))\rightarrow C[t]/(t^2(t-1)(t+1))$，

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\mapsto \sum_{k=0}^{n}a_k(\frac{a+1}{2}t^2+\frac{1-a}{2}t)^k,$$

可以验证 $\varphi(x^2(x-1)(x-a))=0$ 成立，则该定义是好的，容易看出 φ 是同态。

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1-a}{2} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1+a}{2} & \dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}a^3+\dfrac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}a^3+\dfrac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$\det(\boldsymbol{T})=\dfrac{1}{4}(a-1)^2a^2$，由于 $a\neq 0,1$，知行列式不为零，从而 φ 是同构的，结论成立。

引理 3　$C[x]/(x(x-1)(x-a)(x-b))\cong C[t]/(t(t-1)(t+1)(t-d))$，且 $C[t]/(t(t-1)(t+1)\times(t-d))$ 的同构型与 d 取值无关，只要 $d\neq 0,\pm 1, a\neq b$ 且 $a,b\neq 0,1$。

证明　令 $\varphi: C[x]/(x(x-1)(x-a)(x-b))\rightarrow C[t]/(t(t-1)(t+1)(t-d))$，

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \mapsto \sum_{k=0}^{n}a_k(-\frac{1}{2}\frac{ad^2-ad+d^2-2b+d}{d(d^2-1)}t^3+\frac{a+1}{2}t^2+(\frac{1}{2}\frac{ad^2-ad+d^2-2b+d}{d(d^2-1)}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2})t)^k,$$

可以验证有 $\varphi(x(x-1)(x-a)(x-b))=0$ 成立，则该定义是好的，容易看出 φ 是同态映射。设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&T_{22}&T_{23}&T_{24}\\0&T_{32}&T_{33}&T_{34}\\0&T_{42}&T_{43}&T_{44}\end{bmatrix},$$

$$T_{22}=\frac{1}{2}\frac{ad^2-ad+d^2-2b+d}{d(d^2-1)}-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2},\ T_{32}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2},\ T_{42}=-\frac{1}{2}\frac{ad^2-ad+d^2-2b+d}{d(d^2-1)},$$

$$T_{23}=-\frac{1}{2}\frac{a^2d^3-a^2d^2-d^3+2b^2-d^2}{d(d^2-1)},\ T_{33}=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2},\ T_{43}=-\frac{1}{2}\frac{a^2d^2-a^2d-2b^2+d^2+d}{d(d^2-1)},$$

$$T_{24}=-\frac{1}{2}\frac{a^3d^3-a^3d^2+2b^3-d^3-d^2}{d(d^2-1)},\ T_{34}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a^3,\ T_{44}=-\frac{1}{2}\frac{a^3d^2-a^3d-2b^3+d^2+d}{d(d^2-1)}。$$

$\det(\boldsymbol{T})=\dfrac{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a)a(a-b)(b-1)b}{(d+1)(d-1)d}$，由于 $a,b\neq 0,1,a\neq b$，只要 $d\neq 0,\pm 1$，该行列式不为零，从而 φ 是同构的，结论成立。

下面证明 $C[t]/(t(t-1)(t+1)(t-d))$ 的同构型与 d 取值无关，只要 $d\neq 0,\pm 1$。

令 $\varphi:C[x]/(x(x-1)(x+1)(x-d_1))\rightarrow C[t]/(t(t-1)(t+1)(t-d_2))$，$d_1\neq d_2$，

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \mapsto \sum_{k=0}^{n}a_k(\frac{d_1-d_2}{d_2(d_2^2-1)}t^3+(1-\frac{d_1-d_2}{d_2(d_2^2-1)})t)^k,$$

可以验证有 $\varphi(x(x-1)(x+1)(x-d_1))=0$，则该定义是好的，容易看出 φ 是同态。

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&T_{22}&T_{23}&T_{24}\\0&0&1&0\\0&T_{42}&T_{43}&T_{44}\end{bmatrix},$$

$T_{22}=1-\dfrac{d_1-d_2}{d_2(d_2^2-1)}$，$T_{42}=\dfrac{d_1-d_2}{d_2(d_2^2-1)}$，$T_{23}=-\dfrac{(d_1+d_2)(d_1-d_2)}{d_2(d_2^2-1)}$，$T_{43}=\dfrac{(d_1+d_2)(d_1-d_2)}{d_2(d_2^2-1)}$，

$T_{24}=-\dfrac{(d_1^2+d_1d_2+d_2^2)(d_1-d_2)}{d_2(d_2^2-1)}$，$T_{44}=\dfrac{d_1^3-d_2}{(d_2^2-1)d_2}$，又 $\det(\boldsymbol{T})=\dfrac{d_1(d_1+1)(d_1-1)}{d_2(d_2+1)(d_2-1)}$，由于 $d_1,d_2\neq 0,\pm 1$，则 φ 是同构映射，从而结论成立。不妨取 $d=2$，则 $M_5=C[x]/(x(x-1)(x+1)(x-2))$。

4 分类代表元

定理 1 M_2 与 M_4 同构。

证明 令 $\varphi:C[x]/(x^3(x-1))\rightarrow C[t]/(t^2(t+1)(t-1))$，

$$\sum_{k=0}^{n}a_kx^k \mapsto \sum_{k=0}^{n}a_k((-C+\frac{1}{2})t^3+\frac{1}{2}t^2+Ct)^k,C\neq 0,\frac{5}{4},$$

有 $\varphi(x)^3(\varphi(x)-1)=((-C+\frac{1}{2})t^3+\frac{1}{2}t^2+Ct)^3((-C+\frac{1}{2})t^3+\frac{1}{2}t^2+Ct-1)=0$ 成立，则该定义是好的，容易看出 φ 是同态。

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出 $\det(\boldsymbol{T})=C(-2C+\frac{5}{2})\neq 0$，则 $\varphi(x)=(-C+\frac{1}{2})t^3+\frac{1}{2}t^2+Ct$，$C\neq 0,\frac{5}{4}$，是同构映射，从而 M_2 与 M_4 同构。

定理 2 M_1 与 M_2 不同构。

证明 若 M_1 与 M_2 同构，则存在一个同构映射：

$$\varphi: C[x]/(x^3(x-1)) \to C[t]/(t^4),$$
$$x \mapsto At^3 + Bt^2 + Ct + D,$$

从而 $0=\varphi^3(x)(\varphi(x)-1)=(At^3+Bt^2+Ct+D)^3(At^3+Bt^2+Ct+D-1)$，化简可得：

$$4AD^3+12BCD^2+4C^3D-3AD^2-6BCD-C^3=0, \tag{1}$$
$$4BD^3+6C^2D^2-3BD^2-3C^2D=0,$$
$$4CD^3-3CD^2=0, \tag{2}$$
$$D^4-D^3=0。 \tag{3}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & D & D^2 & D^3\\ 0 & C & 2CD & 3CD^2\\ 0 & B & 2BD+C^2 & 3BD^2+3C^2D\\ 0 & A & 2AD+2BC & 3AD^2+6BCD+C^3\end{bmatrix},$$

又 $\det(\boldsymbol{T})=C^6$，由式(3) 得 $D=0$，或 $D^3=1$。当 $D=0$ 时，代入式(1) 得出 $C=0$；当 $D^3=1$，给式(2) 两边乘 D，把 $D^3=1$ 代入该式得到 $C=0$，综上 $C=0$，可知 φ 不是同构映射，从而 M_1 与 M_2 不同构。

定理 3　M_1 与 M_3 不同构。

证明　若 M_1 与 M_3 同构，则存在一个同构映射：

$$\varphi: C[x]/(x^2(x-1)^2) \to C[t]/(t^4),$$
$$x \mapsto At^3 + Bt^2 + Ct + D,$$

从而 $0=\varphi^2(x)(\varphi(x)-1)^2=(At^3+Bt^2+Ct+D)^2(At^3+Bt^2+Ct+D-1)^2$，化简得：

$$4AD^3+12BCD^2+4C^3D-6AD^2-12BCD-2C^3+2AD+2BC=0, \tag{4}$$
$$4BD^3+6C^2D^2-6BD^2-6C^2D+2BD+C^2=0,$$
$$4CD^3-6CD^2+2CD=0,$$
$$D^4-2D^3+D^2=0, \tag{5}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & D & D^2 & D^3\\ 0 & C & 2CD & 3CD^2\\ 0 & B & 2BD+C^2 & 3BD^2+3C^2D\\ 0 & A & 2AD+2BC & 3AD^2+6BCD+C^3\end{bmatrix},$$

又 $\det(\boldsymbol{T})=C^6$，由式(5) 可得 $D=0,1$，当 $D=0$ 代入式(4) 得 $C=0$，当 $D=1$ 代入式(4) 得 $C=0$，综上 $C=0$，可知 φ 不是同构映射，从而 M_1 与 M_3 不同构。

定理 4　M_1 与 M_5 不同构。

证明　若 M_1 与 M_5 同构，则存在一个同构映射：

$$\varphi: C[x]/(x(x-1)(x+1)(x-2)) \to C[t]/(t^4),$$
$$x \mapsto At^2 + Bt^2 + Ct + D,$$

从而有：

$$0=\varphi(x)(\varphi(x)-1)(\varphi(x)+1)(\varphi(x)-2)=$$
$$(At^3+Bt^2+Ct+D)(At^3+Bt^2+Ct+D-1)(At^3+Bt^2+Ct+D+1)(At^3+Bt^2+Ct+D-2),$$

化简得：

$$4AD^3-6AD^2+12BCD^2-12BCD+4C^3D-2C^3-2AD+2A-2BC=0,$$
$$4BD^3-6BD^2+6C^2D^2-6C^2D-2BD+2B-C^2=0,$$
$$4CD^3-6CD^2-2CD+2C=0, \tag{6}$$
$$D^4-2D^3-D^2+2D=0, \tag{7}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & D & D^2 & D^3\\ 0 & C & 2CD & 3CD^2\\ 0 & B & 2BD+C^2 & 3BD^2+3C^2D\\ 0 & A & 2AD+2BC & 3AD^2+6BCD+C^3\end{bmatrix},$$

又 $\det(\boldsymbol{T})=C^6$，由式(7)得 $D=0,\pm1,2$，代入式(6)得 $C=0$，可知 φ 不是同构映射，从而 M_1 与 M_5 不同构。

定理 5 M_2 与 M_3 不同构。

证明 若 M_2 与 M_3 同构，则存在一个同构映射：

$$\varphi: C[x]/(x^3(x-1)) \to C[t]/(t^2(t-1)^2),$$
$$x \mapsto At^3+Bt^2+Ct+D,$$

从而有 $0=\varphi^3(x)(\varphi(x)-1)=(At^3+Bt^2+Ct+D)^3(At^3+Bt^2+Ct+D-1)$，化简得：

$$10A^4+36A^3B+32A^3C+28A^3D+48A^2B^2+84A^2BC+72A^2BD+36A^2C^2+60A^2CD+24A^2D^2+28AB^3+72AB^2C+60AB^2D+60ABC^2+96ABCD+36ABD^2+16AC^3+36AC^2D+24ACD^2+4AD^3+6B^4+20B^3C+16B^3D+24B^2C^2+36B^2CD+12B^2D^2+12BC^3+24BC^2D+12BCD^2+2C^4+4C^3D-7A^3-18A^2B-15A^2C-12A^2D-15AB^2-24ABC-18ABD-9AC^2-12ACD-3AD^2-4B^3-9B^2C-6B^2D-6BC^2-6BCD-C^3=0, \tag{8}$$

$$-9A^4-32A^3B-28A^3C-24A^3D-42A^2B^2-72A^2BC-60A^2BD-30A^2C^2-48A^2CD-18A^2D^2-24AB^3-60AB^2C-48AB^2D-48ABC^2-72ABCD-24ABD^2-12AC^3-24AC^2D-12ACD^2-5B^4-16B^3C-12B^3D-18B^2C^2-24B^2CD-6B^2D^2-8BC^3-12BC^2D+4BD^3-C^4+6C^2D^2+6A^3+15A^2B+12A^2C+9A^2D+12AB^2+18ABC+12ABD+6AC^2+6ACD+3B^3+6B^2C+3B^2D+3BC^2-3BD^2-3C^2D=0, \tag{9}$$

$$4CD^3-3CD^2=0, \tag{10}$$

$$D^4-D^3=0。 \tag{11}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & D & T_{13} & T_{14}\\ 0 & C & T_{23} & T_{24}\\ 0 & B & T_{33} & T_{34}\\ 0 & A & T_{43} & T_{44}\end{bmatrix},$$

$T_{13}=D^2$，$T_{23}=2CD$，$T_{33}=-3A^2-4AB-2AC-B^2+2BD+C^2$，$T_{43}=4A^2+6AB+4AC+2AD+2B^2+2BC$，$T_{14}=D^3$，$T_{24}=3CD^2$，$T_{34}=-6A^3-15A^2B-12A^2C-9A^2D-12AB^2-18ABC-12ABD-6AC^2-6ACD-3B^3-6B^2C-3B^2D-3BC^2+3BD^2+3C^2D$，$T_{44}=7A^3+18A^2B+15A^2C+12A^2D+15AB^2+24ABC+18ABD+9AC^2+12ACD+3AD^2+4B^3+9B^2C+6B^2D+6BC^2+6BCD+C^3$。

由式(11)得 $D=0,1$。

当 $D=1$ 时，代入式(10)得 $C=0$，代入 $\det(\boldsymbol{T})=C(3A+2B+C)(C+A+B)^4=0$。

当 $D=0$ 时，代入式(8)化简得：

$$(10A^2+16AB+12AC+6B^2+8BC+2C^2-7A-4B-C)(C+B+A)^2=0。$$

把 $D=0$ 代入式(9)化简得：

$$-(9A^2+14AB+10AC+5B^2+6BC+C^2-6A-3B)(C+B+A)^2=0。$$

当 $A+B+C=0$ 时，$\det(\boldsymbol{T})=C(3A+2B+C)(C+A+B)^4=0$。

当 $A+B+C\neq0$ 时，要使得上述两式为零，要满足：

$$10A^2+16AB+12AC+6B^2+8BC+2C^2-7A-4B-C=0, \tag{12}$$

$$-9A^2-14AB-10AC-5B^2-6BC-C^2+6A+3B=0, \tag{13}$$

式(12)+式(13)可得：

$$\begin{aligned}&10A^2+16AB+12AC+6B^2+8BC+2C^2-7A-4B-C+\\&\quad(-9A^2-14AB-10AC-5B^2-6BC-C^2+6A+3B)=\\&A^2+2AB+2AC+B^2+2BC+C^2-A-B-C=\\&(C+B+A)(C-1+B+A),\end{aligned}$$

取 $C=1-A-B$ 代入式(12)得 $2A+B+1$，代入式(13)得 $-2A-B-1$。联立方程：

$$2A+B+1=0;\quad A+B+C=1,$$

解出 $A=C-2$，$B=-2C+3$，代入 $\det(\boldsymbol{T})=C(3A+2B+C)(C+A+B)^4=0$，综上得到 M_2 与 M_3 不同构。

定理 6　M_2 和 M_5 不同构。

证明　若 M_2 和 M_5 同构，则存在一个同构映射：

$$\varphi: C[x]/(x(x-1)(x+1(x-2))\to C[t]/(t^3(t-1)),$$
$$x\mapsto At^3+Bt^2+Ct+D,$$

从而有：

$$0=\varphi(x(x-1)(x+1)(x-2))=\varphi(x)(\varphi(x)-1)(\varphi(x)+1)(\varphi(x)-2)=$$
$$(At^3+Bt^2+Ct+D)(At^3+Bt^2+Ct+D-1)(At^3+Bt^2+Ct+D+1)(At^3+Bt^2+Ct+D-2),$$

化简得：

$$A^4+4A^3B+4A^3C+4A^3D+6A^2B^2+12A^2BC+12A^2BD+6A^2C^2+12A^2CD+6A^2D^2+4AB^3+12AB^2C+12AB^2D+12ABC^2+24ABCD+12ABD^2+4AC^3+12AC^2D+12ACD^2+4AD^3+B^4+4B^3C+4B^3D+6B^2C^2+12B^2CD+6B^2D^2+4BC^3+12BC^2D+12BCD^2+C^4+4C^3D-2A^3-6A^2B-6A^2C-6A^2D-6AB^2-12ABC-12ABD-6AC^2-12ACD-6AD^2-2B^3-6B^2C-6B^2D-6BC^2-12BCD-2C^3-A^2-2AB-2AC-2AD-B^2-2BC+2A=0,$$

$$4BD^3+6C^2D-6BD^2-6C^2D-2BD-C^2+2B=0,$$
$$4CD^3-6CD^2-2CD+2C=0, \tag{14}$$
$$D^4-2D^3-D^2+2D=0, \tag{15}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & D & T_{13} & T_{14}\\ 0 & C & T_{23} & T_{24}\\ 0 & B & T_{33} & T_{34}\\ 0 & A & T_{43} & T_{44}\end{bmatrix},$$

$T_{13}=D^2$，$T_{23}=2CD$，$T_{33}=2BD+C^2$，$T_{34}=A^2+2AB+2AC+2AD+B^2+2BC$，$T_{14}=D^3$，$T_{24}=3CD^2$，$T_{34}=3BD^2+3C^2D$，$T_{44}=A^3+3A^2B+3A^2C+3A^2D+3AB^2+6ABC+6ABD+3AC^2+6ACD+3AD^2+B^3+3B^2C+3B^2D+3BC^2+6BCD+C^3$，又 $\det(\boldsymbol{T})=C^3(A+B+C)^3$，由式(15)得 $D=0,\pm1,2$，代入式(14)得 $C=0$，从而 φ 不是同构映射，即 M_2 和 M_5 不同构。

定理 7　M_3 和 M_5 不同构。

证明　若 M_3 和 M_5 同构，则存在一个同构映射：

$$\varphi: C[x]/(x(x-1)(x+1)(x-2))\to C[t]/(t^2(t-1)^2),$$
$$x\mapsto At^3+Bt^2+Ct+D,$$

从而有：

$$0=\varphi(x(x-1)(x+1)(x-d)=$$
$$\varphi(x)(\varphi(x)-1)(\varphi(x)+1)(\varphi(x)-2)=$$
$$(At^3+Bt^2+Ct+D)(At^3+Bt^2+Ct+D-1)(At^3+Bt^2+Ct+D+1)(At^3+Bt^2+Ct+D-2),$$

化简得：

$$10A^4+36A^3B+32A^3C+28A^3D+48A^2B^2+84A^2BC+72A^2BD+36A^2C^2+60A^2CD+24A^2D^2+28AB^3+72AB^2C+60AB^2D+60ABC^2+96ABCD+36ABD^2+16AC^3+36AC^2D+24ACD^2+4AD^3+6B^4+20B^3C+16B^3D+24B^2C^2+36B^2CD+12B^2D^2+12BC^3+24BC^2D+12BCD^2+2C^4+4C^3D-14A^3-36A^2B-30A^2C-24A^2D-30AB^2-48ABC-36ABD-18AC^2-24ACD-6AD^2-8B^3-18B^2C-12B^2D-12BC^2-12BCD-2C^3-4A^2-6AB-4AC-2AD-2B^2-2BC+2A=0,$$

$$-9A^4-32A^3B-28A^3C-24A^3D-42A^2B^2-72A^2BC-60A^2BD-30A^2C^2-48A^2CD-18A^2D^2-24AB^3-60AB^2C-48AB^2D-48ABC^2-72ABCD-24ABD^2-12AC^3-24AC^2D-12ACD^2-5B^4-16B^3C-12B^3D-18B^2C^2-24B^2CD-6B^2D^2-8BC^3-12BC^2D+4BD^3-C^4+6C^2D^2+12A^3+30A^2B+24A^2C+18A^2D+24AB^2+36ABC+24ABD+12AC^2+12ACD+6B^3+12B^2C+6B^2D+6BC^2-6BD^2-6C^2D+3A^2+4AB+2AC+B^2-2BD-C^2+2B=0,$$

$$4CD^3-6CD^2-2CD+2C=0, \tag{16}$$
$$D^4-2D^3-D^2+2D=0。 \tag{17}$$

设 $\boldsymbol{T}$ 是从基底 $1,x,x^2,x^3$ 到 $1,t,t^2,t^3$ 的过渡矩阵，即 $\varphi(1,x,x^2,x^3)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{T}$，可以求出

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & D & T_{13} & T_{14}\\ 0 & C & T_{23} & T_{24}\\ 0 & B & T_{33} & T_{34}\\ 0 & A & T_{43} & T_{44}\end{bmatrix},$$

$T_{13}=D^2$，$T_{23}=2CD$，$T_{33}=-3A-4AB-2AC-B^2+2BD+C^2$，$T_{43}=4A^2+6AB+4AC+2AD+2B^2+2BC$，$T_{14}=D^3$，$T_{24}=3CD^2$，$T_{34}=-6A^3-15A^2B-12A^2C-9A^2D-12AB^2-18ABC-12ABD-6AC^2-6AC^2-6ACD-3B^3-6B^2C-3B^2D-3BC^2+3BD^2+3C^2D$，$T_{44}=7A^3+18A^2B+15A^2C+12A^2D+15AB^2+24ABC+18ABD+9AC^2+12ACD+3AD^2+4B^3+9B^2C+6B^2D+6BC^2+6BCD+C^3$，又 $\det(\boldsymbol{T})=C(3A+2B+C)(C+A+B)^4$，由式(17)得 $D=0,\pm1,2$ 代入式(16)得 $C=0$，从而 φ 不是同构映射，即 M_3 和 M_5 不同构。

综上，复数域 C 上的含主生成元的结合代数一定是交换的，且在同构意义下只有 4 类：

$M_1=C[x]/(x^4)$； $M_2=C[x]/(x^3(x-1))$；

$M_3=C[x]/(x^2(x-1)^2)$； $M_5=C[x]/(x(x-1)(x+1)(x-2))$。

参考文献/References：

[1] ASCHBACHER M. The status of the classification of the finite simple groups[J]. Notice of the American Mathematical Society，2004，51(7)：529.

[2] 孟道骥，王立云，史毅茜，等. 抽象代数Ⅰ-代数学基础[M]. 北京：科学出版社，2011.

[3] AUSLANDER M. Representation Theory of Artin Algebra[M]. Cambridge：Cambridge University Press，1993.

[4] 孟道骥，王立云，史毅茜，等. 抽象代数Ⅱ-结合代数[M]. 北京：科学出版社，2011.

[5] 陈辉. 群的结构与对称性[M]. 杭州：浙江大学出版社，2008.

[6] KENNEDY C. Deep matrix algebras of finite type[J]. Algebras and Reprensentation Theory，2006，9(5)：525-537.

[7] HUANG Wenxue. A characterization of triangularizability of a linear associative algebra[J]. Linear Algebra and Its Applications，1999，299：165-169.

[8] WEI Changguo. Classification of extension torus algebra Ⅱ[J]. Science China Mathematics，2012，55(1)：179-186.

[9] KIRTLAND J. On two classes of finite inseparable p-groups[J]. Acta Mathematica Sinica，2015，31(7)：1203-1214.

[10] TIMOTHY G. The princeton companion to mathematics[J]. Princetion Companion to Mathematics，2008，4(1)：21-24.

[11] HAMILTON W R. On quaternions，or on a new system of imaginaries in algebra[J]. Philosophical Magazine，1844，25(3)：489-495.

[12] LUIS A. Classification of some graded not necessarily associative division algebras Ⅰ[J]. Communications in Algebra，2014，42 (12)：5019-5049.

[13] DROZD Y A，KIRICHENKO V V. Finite Dimensional Algebras[M]. NewYork：Springer-Verlag，1993.

[14] BARNES D W. On $(n+2)$ dimensional n-Lie algebras[J]. arXiv：0704，1892.

[15] KORESHKOV N A. Finite-dimensional homogeneously simple algebras of associative type[J]. Russian Mathematica，2010，54(9)：30-35.

[16] de GRAAF W A. Classification of solvable lie algebras[J]. Experimental Mathematics，2005，14(1)：15-25.

[17] 王颂生，李明楚. 域 K 上三维结合代数的分类[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，1985(2)：23-30.

[18] 孙翠芳，程智. 代数闭域上三维非交换代数的分类[J]. 纯粹数学与应用数学，2010，26(3)：516-519.
SUN Cuifang，CHENG Zhi. The claassfications of 3-dimensionally non-commutative algebras on algebraiclly closed field[J]. Pure and Applied Mathematics，2010，26(3)：516-519.

[19] 赵嗣元. 域 F_p 上四维结合代数的同构分类[J]. 上海师范大学学报(自然科学版)，2001，30(4)：28-33.
ZHAO Siyuan. Classification of associative algebras of dimension 4 over field F_p[J]. Journal of Shanghai Teachers University (Natural Sciences)，2001，30(4)：28-33.

[20] MAZZOLA G. The algebraic and geometric classification of associative associative algebras of dimension five[J]. Manuscripta Mathematica，1979，27(1)：81-101.