第 37 卷第 2 期　　河 北 科 技 大 学 学 报　　Vol. 37, No. 2
2016 年 4 月　　Journal of Hebei University of Science and Technology　　Apr. 2016

文章编号:1008-1542(2016)02-0205-08　　**doi:10.7535/hbkd.2016yx02015**

基于多层概率集的随机系统预测控制

梁华清[1],张冬雯[2],邢少光[1],张沙沙[2]

(1.河北科技大学电气工程学院,河北石家庄　050018;2.河北科技大学信息科学与工程学院,河北石家庄　050018)

摘　要:针对具有 Markov 跳变特点的一类离散随机系统,研究了输入量概率约束下的状态反馈预测控制问题。采用多层概率集的概念和方法,给出了具有多个不同概率软约束下的预测控制器设计算法,在多步反馈律的控制下,系统状态以指定概率进入不同的椭圆内,保证了系统的稳定性,而且扩大了控制问题的可行范围,改善了系统性能。最后仿真实例证明了所提方法的有效性。

关键词:随机过程;预测控制;Markov 跳变;概率约束;多层概率集

中图分类号:TP13　　**文献标志码:**A

Predictive control for stochastic systems based on multi-layer probabilistic sets

LIANG Huaqing[1], ZHANG Dongwen[2], XING Shaoguang[1], ZHANG Shasha[2]

(1. School of Electrical Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China; 2. School of Information Science and Engineering, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang, Hebei 050018, China)

Abstract: Aiming at a class of discrete-time stochastic systems with Markov jump features, the state-feedback predictive control problem under probabilistic constraints of input variables is researched. On the basis of the concept and method of the multi-layer probabilistic sets, the predictive controller design algorithm with the soft constraints of different probabilities is presented. Under the control of the multi-step feedback laws, the system state moves to different ellipses with specified probabilities. The stability of the system is guaranteed, the feasible region of the control problem is enlarged, and the system performance is improved. Finally, a simulation example is given to prove the effectiveness of the proposed method.

Keywords: stochastic process; predictive control; Markov jump; probabilistic constraints; multi-layer probabilistic sets

在工业领域中,人们大都习惯用传统的 PID 控制来处理一些实际问题[1]。然而在处理一些带约束的控制问题时,PID 控制会有很大的局限性。对于此类问题,模型预测控制显现出很大的优势。模型预测控制(MPC)作为一种有着广泛应用的控制方法,是 20 世纪 70 年代从工业领域发展起来的。在文献[2]中,作者针对复杂供暖系统中存在的大时滞、大惯性和不确定性,引入预测控制的方法对系统进行调节,取得了良好

收稿日期:2015-09-29;修回日期:2015-12-18;责任编辑:李　穆
基金项目:河北省自然科学基金(F2014208169)
作者简介:梁华清(1988—),女,河北石家庄人,硕士研究生,主要从事随机系统预测控制方面的研究。
通讯作者:张冬雯教授。E-mail:zdwwtx@hebust.edu.cn

梁华清,张冬雯,邢少光,等.基于多层概率集的随机系统预测控制[J].河北科技大学学报,2016,37(2):205-212.
LIANG Huaqing, ZHANG Dongwen, XING Shaoguang, et al. Predictive control for stochastic systems based on multi-layer probabilistic sets[J]. Journal of Hebei University of Science and Technology, 2016, 37(2): 205-212.

的效果。MPC是一种基于模型的启发式控制算法，能够有效地处理多变量约束问题。其思想是利用历史数据和预测模型，在每一采样时刻通过在线求解一个有限时域的开环最优控制问题，从而得到一个控制作用。如今，预测控制算法的应用领域越来越多，但算法都离不开其本质的3部分：预测模型、滚动优化和反馈校正[3-4]。另外，预测控制自问世以来，在复杂工业过程中针对解决复杂约束优化控制问题已取得了巨大的成功，现在发展成为一门既具有丰富理论支撑又具有实践内容的重要学科[5-9]。

在随机系统控制问题中，不确定性是普遍存在的，这些不确定性描述了系统数学模型与实际系统之间的误差，这种在随机系统中存在的不确定性称之为随机不确定性。这种随机不确定性通常会以某种概率分布来描述。一切随时间变化的过程，往往都要受到某些不确定因素的作用，这种不确定因素服从某种统计概率规律，如果将这些概率信息合理地包含到预测控制器的设计中，就可以得到保守性较低的设计[3]。

目前，对随机系统的预测控制研究已成为国内外关注的热点。在以往的诸多研究中，针对随机系统预测控制已有很多研究成果。文献[10]提出用增广自治预测模型来解决具有凸多面体多重不确定性的随机系统在概率约束下的稳定性问题，并首次提出概率不变集的概念。文献[11]在文献[10]的基础上对系统增加了附加的多重不确定因素，将凸面体不确定性一般化。文献[12]针对附加的随机独立扰动因素，对初始时刻系统的可行性进行研究，并确保了随机约束和二次稳定性条件的满足。而文献[13]则应用随机Tubes约束的方法减少了在线计算量，拓宽了预测区间，改善了系统性能。同时，文献[14]通过使满足约束的性能指标最小化，进而提出控制策略；将系统状态限定在嵌套的椭圆集或随机Tubes内，通过不同Tubes之间的转移概率，保证了系统在满足约束情况下的递归可行性。然而，近年来具有Markov跳变特点的随机系统具有较大的吸引力，并且近年来得到快速的发展[15-18]。在实际的工程问题中，诸如互联子系统的变化，环境条件的突变，系统元件的故障等随机现象都会引起系统的跳变。通过大量的研究发现，这种随机变化的规律通常遵循Markov过程的变化规律[18]。因此，对具有Markov跳变过程的系统的研究就显得尤为重要，在提出之后的很长时间受到国内外学术界关注。于是在文献[18]中，作者提出了具有此特点的随机线性系统，研究了对状态和输入有线性约束且具有Markov跳变特点的随机系统的稳定性和镇定问题。采用Lyapunov稳定性理论和离线LMIs方法解决系统的稳定性问题；应用多级优化方法使性能指标优化问题转化成解决二次规划问题。在文献[10]中，针对具有正态分布的随机不确定模型，以往鲁棒预测控制的方法不再适用，因此该文献作者提出概率不变集的概念，以给定概率满足系统约束，设计预测控制器。这一概念的提出为随机系统的软约束设计提供了新思路。文献[19]更是扩大了约束的范围，提出了多层概率集的概念。多层概率集可以描述系统状态在多步反馈控制律作用下的一系列具有不同概率的分布区域，可以同时保证满足多个不同概率要求的软约束，具有较大的可行范围。该文章在基于多层概率的基础上，在每一时刻求解一个优化问题，使性能指标的上界达到最小值。

本文将应用文献[19]提出的多层概率集的概念和方法，研究具有Markov跳变特点的随机线性系统的预测控制问题，在满足给定概率约束条件的前提下，设计状态反馈控制律，在每一采样周期求解一个优化问题，使性能指标的上界达到一个最小值。

为了叙述简洁，$\mathbf{R}$和$\mathbf{N}$分别表示实数集合和自然数集合；$\{a_i\}_{i=0}^{N}$表示序列$a_0,a_1,\cdots,a_N$；$\Pr\{X=a\}$表示随机变量$X=a$的概率；$E_k\{X\}$表示在状态$\boldsymbol{x}_k$已知的情况下随机变量X的数学期望；对称矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$可以写成$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & *\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ * & \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{U}>0$表示对称矩阵$\boldsymbol{U}$正定；$\boldsymbol{x}_{k+i|k}$，$\boldsymbol{u}_{k+i|k}$分别表示在$k$时刻对$k+i$时刻的状态预测值和输入预测值。

1 问题描述

考虑离散时间随机系统：

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}(w(k))\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}(w(k))\boldsymbol{u}_k, \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}_k\in\mathbf{R}^{n_x}$为系统的状态向量，$\boldsymbol{u}_k\in\mathbf{R}^{n_u}$为系统的输入向量，$\boldsymbol{A}(w(k))\in\mathbf{R}^{n_x\times n_x}$，$\boldsymbol{B}(w(k))\in\mathbf{R}^{n_x\times n_u}$是随机矩阵，对所有时刻$k>0$，随机变量$w(k)\in\boldsymbol{W}=\{w_1,w_2,\cdots,w_s\}\in\mathbf{R}$表示独立同分布的不确定因素。在$k>0$时刻，随机矩阵$\boldsymbol{A}(w(k))$，$\boldsymbol{B}(w(k))$的取值是随机的，可表示成式(2)的形式：

$$x_{k+1}=\begin{cases}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_k, & \text{if } w(k)=w_1,\\ \quad\text{or} & \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_k, & \text{if } w(k)=w_2,\\ \quad\text{or} & \\ \quad\vdots & \\ \boldsymbol{A}_s\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{u}_k, & \text{if } w(k)=w_s\end{cases},\tag{2}$$

其中$(\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{B}_j)$是给定的适当维数的矩阵,且 $\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{A}(w_j),\boldsymbol{B}_j=\boldsymbol{B}(w_j),j\in\{1,2,\cdots,s\}$。

不确定因素 $w(k)$是取值于有限集合的离散时间 Markov 链的跳变模态。Markov 链是 Markov 过程的原始模型。Markov 过程是一类随机过程,在随机系统理论中占有非常重要的地位,并在实际中得到广泛的应用。一个 Markov 过程通常用转移概率 $\Pr\{\boldsymbol{x}(t)\in X|\boldsymbol{x}(\tau)\},\tau,t\in T$,且 $t\geqslant\tau$ 来表示,它表示当给定 τ 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(\tau)$时,过程在时刻 $t>\tau$ 的状态 $\boldsymbol{x}(t)$落入集合 X 的概率。Markov 过程具有一个特殊的性质,即它的下一状态只依赖于当前时刻的状态,而与之前的历史状态无关。Markov 链就是具有这一性质的离散时间随机过程,它是时间和状态都离散的 Markov 过程。

不确定因素 $w(k)$ 在 k 时刻有 s 种不确定形式,其概率分布为

$\boldsymbol{p}(k)=[p_1(k),p_2(k),\cdots,p_s(k)]^{\mathrm{T}}$,其中 $\Pr\{\boldsymbol{w}(k)=\boldsymbol{w}_j,j=1,2,\cdots,s\}=p_j(k)$,且 $\boldsymbol{p}(k)$ 满足:

$$\boldsymbol{p}(k)\in D=\{p\mid\sum_{j=1}^{s}p_j(k)=1,p\geqslant 0\}。$$

假设 1　对所有的 $k\in\mathbf{N}$,有概率分布 $\boldsymbol{p}(k)\in P$,且 $P\subseteq D$ 是一个已知的多面体,其顶点为 $v^1,v^2,\cdots,v^l\in\mathbf{R}^s,\boldsymbol{v}^l=[v_1^l,v_2^l,\cdots,v_s^l]^{\mathrm{T}}$。

假设 2　对所有的 $k\in\mathbf{N}$,概率分布 $\boldsymbol{p}(k)$ 是可观的。

为了便于描述 Markov 链中的跳变模态 w,假定当前 k 时刻为 $w(k)=w_i,i\in\{1,2,\cdots,s\}$,下一时刻的 $k+1$ 为 $w(k+1)=w_j,j\in\{1,2,\cdots,s\}$ 则一步转移概率可以写成式(3)形式:

$$\lambda_{ij}=p(w(k+1)=w_j,w(k)=w_i),\tag{3}$$

其中

$$\lambda_{ij}\geqslant 0,\forall\, i,j\in\{1,2,\cdots,s\},且\sum_{j=1}^{s}\lambda_{ij}=1。\tag{4}$$

一步转移概率矩阵可写为 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}&\cdots&\lambda_{1s}\\ \lambda_{21}&\lambda_{22}&\cdots&\lambda_{2s}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ \lambda_{s1}&\lambda_{s2}&\cdots&\lambda_{ss}\end{bmatrix}$。

根据 $\boldsymbol{p}(k)$ 的概率分布可以知道,系统在每一时刻的状态都有 s 种不同的形式。因此对原始系统的研究就转化成对以下系统的研究:

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_ju_k,w(k)=w_j,j\in\{1,2,\cdots,s\},\tag{5}$$

式(5) 以概率 $p_j,j\in\{1,2,\cdots,s\}$ 成立。

系统的输入 $\boldsymbol{u}_k$ 满足的概率约束如下:

$$\Pr\{\boldsymbol{G}_m\boldsymbol{u}_k\leqslant\boldsymbol{h}_m\}\geqslant p_m,\tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{h}_m\in\mathbf{R}^{n_m},m=1,2,\cdots,\mu$。当某个 m 对应 $p_m=1$ 时,此约束为确定性约束。通过对约束的排列及约束系数的选取,令 $p_1<p_2<\cdots<p_\mu$。

在 k 时刻,预测控制所要优化的性能指标为

$$J_k=E_k\sum_{i=0}^{\infty}\{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_{k+i|k}+\boldsymbol{u}_{k+i|k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{k+i|k}\},\tag{7}$$

其中,$\boldsymbol{x}_{k+i|k}$ 和 $\boldsymbol{u}_{k+i|k}$ 是系统在 k 时刻对未来 $k+i$ 时刻的状态和输入的预测值,$\boldsymbol{Q}>0$ 和 $\boldsymbol{R}>0$ 分别是状态和输入权值矩阵。

预测控制的目的是在每一采样时刻,当系统满足式(3)、式(4)、式(6) 的约束时,求解最优问题(7),使性能指标 J_k 达到最小值,并设计系统(5) 的状态反馈控制律:

$$\boldsymbol{u}_{k+i}=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}_{k+i},\quad i\geqslant 0。\tag{8}$$

2 多层概率集与概率约束

概率约束(6)给定了系统输入满足的概率集合。当系统满足了给定的输入后，在设计好的状态反馈控制律作用下，会使系统的状态也满足相应的概率集合。多层概率约束(6)有 μ 个不相同的概率要求，因此对每一预测时刻至少需要计算 μ 个状态的集合，使预测状态分别按不同的给定概率属于这些集合。

定义 1[19] 多层概率集由 μ 层嵌套的椭圆集组成。从 $k+i$ 时刻的某个椭圆集出发的状态，在控制律 K_i 的控制下，将分别按不同的设定概率进入 $k+i+1$ 时刻的 μ 层椭圆集中。

根据上述定义，对任意预测时刻 $k+i, i=0,1,\cdots$，可以得到预测状态在多层椭圆集内的概率分布估计，由此确保约束(6)。多层概率集的表示方法如下：前 N 步预测(从 k 时刻到 $k+N-1$ 时刻)在反馈律 $\boldsymbol{K}_i$ 下的第 m 层椭圆集记作 $\Omega_{k+i|k}^{(m)}$，$N+1$ 步和之后的预测在反馈律 $\boldsymbol{K}_N$ 下的第 m 层终端椭圆集记作 $\Omega_{k+N|k}^{(m)}$。这些椭圆集的具体形式为

$$\Omega_{k+i|k}^{(m)}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{m,i}^{-1}\boldsymbol{x}\leqslant 1\},\quad m=1,2,\cdots,\mu。\tag{9}$$

当施加约束：

$$0<\boldsymbol{Q}_{1,i}<\boldsymbol{Q}_{2i}<\cdots<\boldsymbol{Q}_{\mu-1,i}<\boldsymbol{Q}_{\mu,i}\tag{10}$$

时，系统在每一时刻的 μ 层椭圆集满足嵌套关系 $\Omega_{k+i|k}^{(1)}\subseteq\Omega_{k+i|k}^{(2)}\subseteq\cdots\subseteq\Omega_{k+i|k}^{(\mu-1)}\subseteq\Omega_{k+i|k}^{(\mu)}$。

文献[19]中作者描述的引理 1 是将某一时刻的随机矩阵 $\boldsymbol{A}_{k+i}, \boldsymbol{B}_{k+i}$ 属于一个多面体集合，于是涉及到了凸多面体的顶点。而在此文的研究相当于取集合中的一个点研究，这个点具有 Markov 特性。于是将文献[19]中的引理 1 进行修改，可以得到满足本文特点的如下引理。该引理保证了系统状态在相邻时刻的 2 个椭圆集内按给定概率转移。这一结论将在之后用来预测未来任意时刻状态的概率分布区域。

引理 1 考虑具有 Markov 跳变特点的离散时间随机系统，如果存在矩阵变量 $\boldsymbol{Q}_{\mu,i}, \boldsymbol{Q}_{l,i}, \boldsymbol{Q}_{m,i+1}\in\mathbf{R}^{n_x\times n_x}$，$\boldsymbol{Y}_i\in\mathbf{R}^{n_u\times n_x}$，以概率 $p_j, j\in\{1,2,\cdots,s\}$ 使下列线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix}2\boldsymbol{Q}_{\mu,i}-\boldsymbol{Q}_{l,i} & * \\ \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Q}_{\mu,i}+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{Q}_{m,i+1}\end{bmatrix}\geqslant 0,\tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{Q}_{m,i}=\boldsymbol{Q}_{m,N}, \boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{Y}_N, i>N$，且 $\boldsymbol{A}_j\in\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_s\}, \boldsymbol{B}_j\in\{\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_s\}$，$\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{B}_j$ 是任意 $k+i$ 时刻随机矩阵 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\boldsymbol{B}_j$ 以概率 $p_j, j\in\{1,2,\cdots,s\}$ 成立的矩阵，那么椭圆 $\Omega_{k+i|k}^{(l)}$ 内的系统状态在反馈律 $\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1}$ 的控制下，将以不小于 p 的概率进入椭圆 $\Omega_{k+i+1|k}^{(m)}$，即：

$$\Pr\{\boldsymbol{x}_{k+i+1|k}\in\Omega_{k+i+1|k}^{(m)}\mid\boldsymbol{x}_{k+i|k}\in\Omega_{k+i|k}^{(l)}\}\geqslant p。\tag{12}$$

证明：当椭圆 $\Omega_{k+i|k}^{(l)}$ 内的系统状态在反馈律的控制下以不小于 p 的概率进入椭圆 $\Omega_{k+i+1|k}^{(m)}$ 时，有：

$$\boldsymbol{x}_{k+i+1|k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{m,i+1}^{-1}\boldsymbol{x}_{k+i+1|k}\leqslant\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{l,i}^{-1}\boldsymbol{x}_{k+i|k},$$

将式(5)代入式(12)，得：

$$\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_j+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{m,i+1}^{-1}(\boldsymbol{A}_j+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}_{k+i|k}\leqslant\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{l,i}^{-1}\boldsymbol{x}_{k+i|k}。$$

根据正定矩阵的性质可以得到：

$$\boldsymbol{Q}_{l,i}^{-1}-(\boldsymbol{A}_j+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{m,i+1}^{-1}(\boldsymbol{A}_j+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{K}_i)\geqslant 0,$$

将上式左右两边同时乘以 $\boldsymbol{Q}_{\mu,i}$，得到：

$$\boldsymbol{Q}_{\mu,i}\boldsymbol{Q}_{l,i}^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mu,i}-(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Q}_{\mu,i}+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{m,i+1}^{-1}(\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Q}_{\mu,i}+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{Y}_i)\geqslant 0,$$

利用 Schur 补，进一步得到：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{\mu,i}\boldsymbol{Q}_{l,i}^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mu,i} & * \\ \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Q}_{\mu,i}+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{Q}_{m,i+1}\end{bmatrix}\geqslant 0。$$

根据文献[19]中引理 1 的证明可以得到：

$$\begin{bmatrix}2\boldsymbol{Q}_{\mu,i}-\boldsymbol{Q}_{l,i} & * \\ \boldsymbol{A}_j\boldsymbol{Q}_{\mu,i}+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{Q}_{m,i+1}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

于是，椭圆 $\Omega_{k+i|k}^{(l)}$ 内的系统状态在反馈律 $\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{Y}_i\boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1}$ 的控制下，将以不小于 p 的概率进入椭圆 $\Omega_{k+i+1|k}^{(m)}$，即：

$$\Pr\{\boldsymbol{x}_{k+i+1|k}\in\Omega_{k+i+1|k}^{(m)}\mid\boldsymbol{x}_{k+i|k}\in\Omega_{k+i|k}^{(l)}\}\geqslant p,$$

因此，引理 1 证毕。

上述引理 1 给出了保证状态在相邻时刻的椭圆集 $\Omega_{k+i|k}^{(l)}$ 和 $\Omega_{k+i+1|k}^{(m)}$ 概率转移的一般性条件。在引理 1 的基础上，可建立状态在多层概率集内转移的概率矩阵。本文所考虑的概率约束(6)需要在任意未来时刻以给定

概率满足。下面定理基于引理 1 给出了概率约束(6) 的确保条件。

定理 1　考虑具有 Markov 跳变特点的离散时间随机系统,如果存在矩阵变量 $\boldsymbol{Q}_{m,i} \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$,$\boldsymbol{Y}_i \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}$,$\boldsymbol{W}_{m,i} \in \mathbf{R}^{n_m \times n_m}$,$i \in \{0,1,\cdots,N\}$,$m = 1,2,\cdots,\mu$,以概率 p_j,$j \in \{1,2,\cdots,s\}$ 满足式(3)、式(4) 和如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} 1 & \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \\ * & \boldsymbol{Q}_{\mu,0} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\mu,i} & * \\ \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Q}_{\mu,i} + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{Y}_i & \boldsymbol{Q}_{m,i+1} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{m,i} & \boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i \\ * & 2\boldsymbol{Q}_{\mu,i} - \boldsymbol{Q}_{m,i} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_{m,i} \boldsymbol{e}_n \leqslant (\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_m)^2, \quad n = 1,2,\cdots,n_m, \tag{16}$$

其中,$\boldsymbol{Q}_{m,i} = \boldsymbol{Q}_{m,N}$,$i > N$,且 $\boldsymbol{A}_j \in \{\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s\}$,$\boldsymbol{B}_j \in \{\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_s\}$,$\boldsymbol{A}_j$,$\boldsymbol{B}_j$ 是任意 $k+i$ 时刻随机矩阵 $\boldsymbol{A}_j$ 和 $\boldsymbol{B}_j$ 以概率 p_j,$j \in \{1,2,\cdots,s\}$ 成立的矩阵,$\boldsymbol{e}_n \in \mathbf{R}^{n_m}$ 是单位矩阵的第 n 列,并令 $k+i$ 时刻的反馈律为 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1}$,则系统(5) 的状态在反馈律序列 $\{\boldsymbol{K}_i\}_{i=0}^{N}$ 的控制下满足概率约束(6)。

证明:以下证明均在系统方程满足概率 p_j,$j \in \{1,2,\cdots,s\}$ 的情况下完成。

由式(9) 椭圆集的表示形式可得在 k 时刻有 $\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1} \boldsymbol{x}_k \leqslant 1$,由 Schur 补可以得到线性矩阵不等式(13),说明 $\boldsymbol{x}_k \in \Omega_{k|k}^{(\mu)}$,所以 $\boldsymbol{x}_{k+i|k}$ 以概率 1 属于 $\Omega_{k+i|k}^{(\mu)}$。

在引理 1 中,在式(11) 中,设 $l = \mu$,$p = p_m$,可以得到式(14) 的形式,所以椭圆 $\Omega_{k+i|k}^{(\mu)}$ 内的状态将以不小于 p_m 的概率进入 $\Omega_{k+i+1|k}^{(m)}$,$m = 1,2,\cdots,\mu$。

当系统满足概率约束(6) 时,则在 $k+i$ 时刻满足约束 $\Pr\{\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{u}_{k+i|k} \leqslant \boldsymbol{h}_m\} \geqslant p_m$。

将式 $\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{u}_{k+i|k} \leqslant \boldsymbol{h}_m$ 左乘 $\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}$,得:

$$\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{u}_{k+i|k}) \leqslant \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_m \Rightarrow \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{K}_i \boldsymbol{x}_{k+i}) \leqslant \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_m \Rightarrow \boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{W}_{m,i} \boldsymbol{e}_n \leqslant (\boldsymbol{e}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{h}_m)^2。$$

根据文献[19] 中定理 1 的证明可得:

当 $\boldsymbol{x}_{k+i|k} \in \Omega_{k+ik}^{m}$ 时,有 $\boldsymbol{W}_{m,i} \geqslant (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{K}_i) \boldsymbol{Q}_{m,i} (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}}$。

将控制律 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1}$ 代入上式,可得 $\boldsymbol{W}_{m,i} \geqslant (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1}) \boldsymbol{Q}_{m,i} (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1})^{\mathrm{T}}$,所以,有 $\boldsymbol{W}_{m,i} \geqslant (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i) \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{Q}_{m,i} \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}}$。

由不等式 $\boldsymbol{Q}_{\mu,i} \boldsymbol{Q}_{m,i}^{-1} \boldsymbol{Q}_{\mu,i} \geqslant 2\boldsymbol{Q}_{\mu,i} - \boldsymbol{Q}_{m,i}$,代入上式可以得到:

$$\boldsymbol{W}_{m,i} \geqslant (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i)(2\boldsymbol{Q}_{\mu,i} - \boldsymbol{Q}_{m,i})^{-1} (\boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}}。$$

利用 Schur 补,上式可得:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_{m,i} & \boldsymbol{G}_m \boldsymbol{Y}_i \\ * & 2\boldsymbol{Q}_{\mu,i} - \boldsymbol{Q}_{m,i} \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

式(15) 证得,因此定理 1 证毕。

3　预测控制算法设计

此处给出多步反馈律下的性能指标(7) 的求解算法。多步反馈律在前 N 步依次使用反馈律 $\boldsymbol{K}_0$,$\boldsymbol{K}_1$,$\cdots$,$\boldsymbol{K}_{N-1}$,第 $N+1$ 步及之后使用反馈律 $\boldsymbol{K}_N$。对于具有 Markov 跳变特点的离散时间随机系统(5) 而言,直接优化性能指标(7) 比较困难,所以可对式(7) 施加一个上界。以下定理给出多步反馈律下的性能指标。

定理 2　若系统(5) 的当前时刻状态为 $\boldsymbol{x}_k$,且存在矩阵变量 $\boldsymbol{Q}_{\mu,i} > 0 \in \mathbf{R}^{n_x \times n_x}$,$\boldsymbol{Y}_i \in \mathbf{R}^{n_u \times n_x}$,$\gamma > 0 \in \mathbf{R}$,$i = 0,1,\cdots,N$,以概率 p_j,$j \in \{1,2,\cdots,s\}$ 满足式(3)、式(4) 和如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\mu,i} & (\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Q}_{\mu,i} + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{Q}^{1/2} \boldsymbol{Q}_{\mu,i})^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{R}^{1/2} \boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}} \\ * & \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1} & 0 & 0 \\ * & 0 & \gamma \boldsymbol{I} & 0 \\ * & 0 & 0 & \gamma \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{17}$$

并令 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1}$,则在反馈律序列 $\{\boldsymbol{K}_i\}_{i=0}^{N}$ 的控制下,性能指标(7) 的一个上界为 $\gamma \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1} \boldsymbol{x}_k$。

证明:根据文献[22],当 $i \to \infty$ 时,$\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i|k}$ 的极限存在并为有限值,即 $\lim\limits_{i \to \infty} \boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i|k} = \alpha$,不失

一般性,设 $\alpha=0$,所以 $J_k \leqslant \gamma \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1} \boldsymbol{x}_k$ 可以等价地写成

$$J_k \leqslant \gamma \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1} \boldsymbol{x}_k - \lim_{i\to\infty} E_k\{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i|k}\}。$$

上式可以等价为如下不等式:

$$E_k \sum_{i=0}^{\infty} (\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x}_{k+i|k} + \boldsymbol{u}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{u}_{k+i|k}) \leqslant E_k\{\gamma \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1} \boldsymbol{x}_k\} - \lim_{i\to\infty} E_k\{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i|k}\},$$

将控制律 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{Y}_i \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1}$ 代入上式,可得:

$$\begin{aligned}
E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{K}_i) \boldsymbol{x}_{k+i|k}\} \leqslant E_k\{\gamma \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1} \boldsymbol{x}_k\} - \lim_{i\to\infty} E_k\{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i|k}\} \Rightarrow E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{K}_i) \boldsymbol{x}_{k+i|k}\} \leqslant \\
E_k\{\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1} \boldsymbol{x}_k\} - E_k\{\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,1}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+1}\} + E_k\{\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,1}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+1}\} - E_k\{\boldsymbol{x}_{k+2}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,2}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+2}\} + \\
E_k\{\boldsymbol{x}_{k+2}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,2}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+2}\} - E_k\{\boldsymbol{x}_{k+3}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,3}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+3}\} + \cdots + \\
E_k\{\boldsymbol{x}_{k+i}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i}\} - E_k\{\boldsymbol{x}_{k+i+1}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i+1}\} = \\
E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i}\} - E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i+1}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i+1}\} \Rightarrow \\
E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{K}_i) \boldsymbol{x}_{k+i|k}\} \leqslant E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i} - \boldsymbol{x}_{i+k+1}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i+1}\} \Rightarrow \\
E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i|k}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{K}_i) \boldsymbol{x}_{k+i|k}\} \leqslant \\
E_k \sum_{i=0}^{\infty} \{\boldsymbol{x}_{k+i}^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} \boldsymbol{x}_{k+i} - \boldsymbol{x}_{k+i}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1}^{-1} (\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{K}_i) \boldsymbol{x}_{k+i}\} \Rightarrow \\
\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{K}_i \leqslant \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{-1} - (\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{K}_i)^{\mathrm{T}} \gamma \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1}^{-1} (\boldsymbol{A}_j + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{K}_i)。
\end{aligned}$$

将上式左右两边分别乘以 γ^{-1},再分别左乘 $\boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{\mathrm{T}}$,右乘 $\boldsymbol{Q}_{\mu,i}$,得

$$\boldsymbol{Q}_{\mu,i} - (\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Q}_{\mu,i} + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1}^{-1} (\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Q}_{\mu,i} + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{Y}_i) - \gamma^{-1} \boldsymbol{Q}_{\mu,i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{Q}_{\mu,i} - \gamma^{-1} \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{R} \boldsymbol{Y}_i \geqslant 0,$$

应用 Schur 补可知:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{\mu,i} & (\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{Q}_{\mu,i} + \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{Q}^{1/2} \boldsymbol{Q}_{\mu,i})^{\mathrm{T}} & (\boldsymbol{R}^{1/2} \boldsymbol{Y}_i)^{\mathrm{T}} \\ * & \boldsymbol{Q}_{\mu,i+1} & 0 & 0 \\ * & 0 & \gamma \boldsymbol{I} & 0 \\ * & 0 & 0 & \gamma \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \geqslant 0。$$

上式可根据 $p_j, j \in \{1,2,\cdots,s\}$ 写成 s 个线性矩阵不等式,因此定理 2 证毕。

由此,该预测控制问题转化为如下问题的求解:

在 $k=0,1,\cdots$ 时刻,已知系统状态为 $\boldsymbol{x}_k$,求解如下优化问题:

$$\min_{\substack{Q_{m,i}, Y_i, W_{m,i}, \gamma \\ i=0,1,\cdots,N \\ m=1,2,\cdots,\mu}} \gamma, \tag{18}$$

s.t. 式(3)、式(4)、式(10)、式(13)-式(16)、式(17),

计算反馈律 $\boldsymbol{K}_{0|k} = \boldsymbol{Y}_0 \boldsymbol{Q}_{\mu,0}^{-1}$,并施加控制量 $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{K}_{0|k} \boldsymbol{x}_k$ 于系统(5)。

引理 3[19] 如果以上算法的优化问题在 k 时刻可行,则在之后的所有时刻都是可行的。并且在该算法的控制下,系统均方稳定,状态以概率 1 收敛到原点。

在文献[19]中,定理 3 充分证明了当该算法在 k 时刻可行时,在 $k+1$ 时刻也是可行的,并且满足均方稳定的定义,并以此类推在之后的任意时刻都可行。因此,在本文中引用文献[19]中的定理 3 也是可行的,可以保证系统均方稳定,并且以概率 1 收敛到原点。

随机系统预测控制算法的步骤如下:

Step 1:设 $k=0$;

Step 2:求解优化问题(18),得到状态反馈控制矩阵 $\boldsymbol{K}_{0|k}$;

Step 3:对系统实施控制 $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{K}_{0|k} \boldsymbol{x}_k$,设已知初始值为 $\boldsymbol{x}_k$,检测系统的状态值 $\boldsymbol{x}_{k+1}$;

Step 4:进入下一个采样时刻 $k+1$,转到 Step 2 继续计算。

4　仿真验证

本节考虑一个具有 3 个模态的 Markov 随机跳变系统,通过数值仿真实例说明算法的可行性。

针对如下系统:

$$\boldsymbol{x}_{k+1}=\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{B}_j\boldsymbol{u}_k,$$

$\boldsymbol{A}_j=\begin{bmatrix}-0.8 & 1\\ 0 & w_j\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}_j=[0\quad 1]^{\mathrm{T}}$,$j\in\{1,2,3\}$,$w(k)\in\boldsymbol{W}=\{0.6,1.0,0.4\}$,其中 $\boldsymbol{A}_j$,$\boldsymbol{B}_j$ 分别以概率 p_j 成立,系统的转移概率矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.1 & 0.6 & 0.3\\ 0.2 & 0.1 & 0.7\end{bmatrix}$,

对系统施加约束:

$$\Pr\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}_k\leqslant 1\right\}\geqslant 0.9,$$

设初始状态:

$$\boldsymbol{x}_0=[-0.7\quad -0.3]^{\mathrm{T}},$$

初始模态:

$$\boldsymbol{w}_j=0.6,$$

给定加权矩阵:

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}=1\text{ ,仿真步长取 1.5。}$$

根据定理 1 和定理 2,应用 Matlab LMI 软件可以求出控制律 K_i,根据引理 3 可以知道,系统在 k 时刻之后的任意时刻都是成立的,并且最终以概率 1 收敛于原点,从而得到系统在所求控制律的作用下最终趋于稳定。

采用 Matlab 软件进行仿真,仿真结果如图 1 所示。

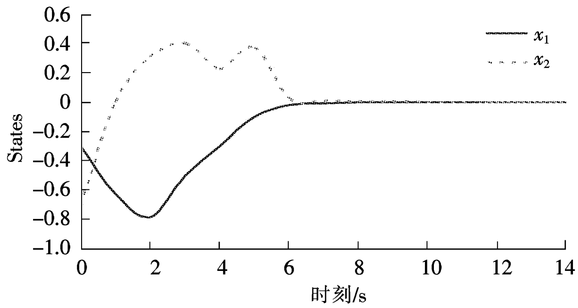

图 1　系统状态轨迹曲线

Fig. 1　Trajectory curve of system state

从仿真结果可以看出,具有 Markov 跳变特点的随机系统,虽然其系统矩阵和输入矩阵都是随时间而变化的,但是在本文设计的控制器作用下,系统能够排除随机干扰,最终保持稳定,从而实现良好的性能。

5　结　语

本文研究了具有 Markov 跳变特点的随机系统当满足一系列不同设定概率软约束条件时的预测控制算法,为使多层概率集满足概率软约束,采用多步反馈控制方法计算反馈序列,使系统的性能指标得到优化,保证了递归的可行性和稳定性,具有较大的可行范围。

参考文献/References:

[1]　任有志,王璐,刘辉. 基于 PLC 的大型热油锅炉自动化改造[J]. 河北工业科技,2015,32(3):264-267.
REN Youzhi,WANG Lu,LIU Hui. Automatic transformation of large hot oil boiler based on PLC[J]. Hebei Journal of Industrial Science and Technology,2015,32(3):264-267.

[2]　张苏英,齐雪莲,郭慧聪,等. 基于预测模糊的供暖系统控制算法研究[J]. 河北工业科技,2013,30(3):143-146.
ZHANG Suying,QI Xuelian,GUO Huicong,et al. Study on control algorithm of heating system based on predictive fuzzy control[J]. Hebei Journal of Industrial Science and Technology,2013,30(3):143-146.

[3]　席裕庚,李德伟,林姝. 模型预测控制——现状与挑战[J]. 自动化学报,2013,39(3): 222-236.
XI Yugeng,LI Dewei,LIN Shu. Model predictive control:Status and challenges[J]. Acta Automatica Sinica,2013,39(3):222-236.

[4] 钱积新,赵均,徐祖华. 预测控制[M]. 北京:北京化工大学出版社,2007.

[5] DING Baocang, XI Yugeng, CYCHOWSKI M T, et al. A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control[J]. Automatica, 2008, 44(1): 258-264.

[6] LI Dewei, XI Yugeng, ZHENG Pengyuan. Constrained robust feed-back model predictive control for uncertain systems with polytopic description[J]. International Journal of Control, 2009, 82(7): 1267-1274.

[7] LI Dewei, XI Yugeng, GAO Furong. Synthesis of dynamic output feedback RMPC with saturated inputs[J]. Automatica, 2013, 49(4): 949-954.

[8] CHENG Qifeng, CANNON M, KOUVARITAKI B. The design of dynamics in the prediction structure of robust MPC[J]. International Journal of Control, 2013, 86(11): 2096-2103.

[9] ZHENG Pengyuan, LI Dewei, XI Yugeng, et al. Improved model prediction and RMPC design for LPV systems with bounded changes[J]. Automatica, 2013, 49(12): 3695-3699.

[10] CANNON M, KOUVARITAKI B, WU Xingjian. Model predictive control for systems with stochastic multiplicative uncertainty and probabilistic constraints[J]. Automatica 2009, 45(1): 167-172.

[11] WU Xingjian. Probabilistic constrained MPC for multiplicative and additive stochastic uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(7): 1626-1632.

[12] KOUVARITAKI B, CANNON M, CHENG Qifeng. Explicit use of probabilistic distributions in linear predictive control[J]. Automatica, 2010, 46: 1719-1724.

[13] CANNON M, KOUVARITAKI B, CHENG Qifeng. Stochastic tubes in model predictive control with probabilistic constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(1): 194-200.

[14] CANNON M, KOUVARITAKI B, NG D. Probabilistic tubes in linear stochastic model predictive control[J]. Systems and Control Letters, 2009, 58(10/11): 747-753.

[15] 刘飞,蔡胤. 基于终端不变集的 Markov 跳变系统的约束预测控制[J]. 自动化学报,2008,34(4):496-499.
LIU Fei, CAI Yin. Constrained predictive control for Markov jump linear system based on terminal invariant sets[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(4): 496-499.

[16] 程晋功. Markov 跳变系统的反馈预测控制研究[D]. 无锡:江南大学,2014.
CHENG Jingong. The Research of Feedback Predictive Control for Markov Jump Systems[D]. Wuxi: Jiangnan University, 2014.

[17] 肖琳. Markov 跳变系统的模型预测控制研究[D]. 烟台:鲁东大学,2013.
XIAO Lin. Model Predictive Control Method for Markov Jump Systems[D]. Yantai: Ludong University, 2013.

[18] BERNARDINI D, BEMPORAD A. Stabilizing model predictive control of stochastic constrained linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(6): 1468-1480.

[19] 李济炜,李德伟,席裕庚,等. 基于多层概率集的随机预测控制算法设计[J]. 自动化学报,2014,40(12):2697-2705.
LI Jiwei, LI Dewei, XI Yugeng, et al. On design of stochastic model predictive control algorithm based on multi-layer probabilistic sets[J]. Acta Automatica Sinica, 2014, 40(12): 2697-2705.

[20] SU Yang, TAN K K, LEE T H. Comments on "Model predictive control for systems with stochastic multiplicative uncertainty and probabilistic constraints"[J]. Automatica, 2011, 47(2): 427-428.

[21] WANG Chen, ONG C J, SIM M. Model predictive control using segregated disturbance feedback[J]. IEEE Transactions on Automatica Control, 2010, 55(4): 831-840.

[22] WILLIAMS D. Probability with Martingales[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.