

# 对流扩散方程的多尺度解耦小波算法研究

汪友明<sup>1,2</sup>, 吴青<sup>1</sup>, 沈建冬<sup>1</sup>

(1. 西安邮电大学自动化学院, 陕西西安 710121; 2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁大连 116023)

**摘要:**针对传统有限元方法在求解对流扩散问题时常会出现的数值震荡和数值耗散等缺点,提出一种对流扩散方程的尺度解耦小波求解方法。介绍第二代小波多分辨分析,推导有限元多分辨空间的两尺度关系,提出对流扩散方程的多尺度计算框架。推导对流扩散方程的解耦条件,并利用提升方案构造多尺度解耦小波。提出多尺度解耦小波算法,该方法通过向求解域添加解耦小波,逐步逼近问题精确解。数值算例证明,解耦小波是一种求解对流扩散方程性能优良的小波基。

**关键词:**对流扩散方程;多尺度计算;解耦小波

中图分类号:O241.82;O242.21 文献标志码:A

## A multi-scale decoupling wavelet algorithm for convection-diffusion equations

WANG Youming<sup>1,2</sup>, WU Qing<sup>1</sup>, SHEN Jiandong<sup>1</sup>

(1. School of Automation, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an Shaanxi 710121, China; 2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116023, China)

**Abstract:** In order to solve the convection-diffusion problems of numerical oscillation and dissipation in traditional finite element method, a scaled decoupled wavelet solution method is proposed. Firstly, the multi-resolution analysis of second generation wavelets is introduced, and the finite element two multi-resolution spacial scaling relation is derived, then the multi-scale computational framework is presented for solving convection-diffusion equations. The decoupling conditions of convection-diffusion equations are developed, and the multi-scale decoupling wavelets are constructed by the lifting scheme. A multi-level decoupled wavelets algorithm is proposed for approximating the exact solution by adding the decoupled wavelets into the solving domain. Numerical example shows that the decoupled wavelets have good computational performance in solving convection-diffusion equations.

**Key words:** convection-diffusion equations; multi-scale computation; decoupled wavelets.

对流扩散问题是电子、流体力学、传热学等学科以及水利工程、环境工程、化工、冶金、航空等应用领域中经常遇到的基础问题之一。传统有限元方法在求解对流扩散问题时常会出现数值震荡和数值耗散等缺点<sup>[1-2]</sup>。小波数值方法是近年来出现的新兴数值算法,其优点是多尺度、多分辨、紧支撑等特性,可根据求解域的变化梯度或奇异性任意改变小波的分析尺度或提高逼近阶,而小波的紧支性、正则性使得小波基函数聚焦到待求解问题的任意细节,从而实现工程问题的高效求解<sup>[3-6]</sup>。近年来将小波方法与传统的数值方法相结合出现了很多性能优越的新算法,包括小波 Galerkin 法<sup>[7-8]</sup>,小波配置法<sup>[9]</sup>,小波 Petrov-Galerkin 法<sup>[10]</sup>,小

收稿日期:2013-03-24;修回日期:2013-05-28;责任编辑:李穆

基金项目:国家自然科学基金(51205309, 61100165);工业装备结构分析国家重点实验室开放课题基金(GZ1209);陕西省教育厅自然科学专项(2013JK0992)

作者简介:汪友明(1981-),男,湖北黄冈人,讲师,博士,主要从事小波数值分析与工程应用方面的研究。

E-mail: xautroland@163.com

波最小二乘法<sup>[11]</sup>和小波有限元法<sup>[12-13]</sup>等。

以伸缩、平移为基础的第一代小波无法在有限、不规则、非结构化的网格上构造,且在求解工程问题前所选定小波的特性已无法改变,这些缺点常难以满足各种工程问题的多尺度计算要求,使得工程多尺度计算存在难以插值、强耦合及收敛性差等缺点<sup>[14]</sup>。第二代小波理论的提出有效地解决了这些问题,它不再依赖于伸缩、平移变换来构造小波,而是利用提升系数灵活地构造具有期望特性的小波基,例如紧支撑、对称、消失矩等特性,给工程问题提供了非常丰富的小波基<sup>[15-16]</sup>。目前,第二代小波基在逐步应用于工程数值计算方面。2004年, PINHO 等应用第二代小波基求解 Maxwell 方程,获得较高的求解效率<sup>[17]</sup>。2006年, WANG 等利用第二代小波构造动态计算网格求解波动方程<sup>[18]</sup>。2007年, HE 等提出基于预测算子和更新算子的第二代小波求解算法<sup>[19]</sup>。2009年, MEHRA 等提出自适应多尺度第二代小波方法,有效求解了椭球面方程<sup>[20]</sup>。

如何根据对流扩散问题的需要灵活、有效构造具有期望特性的第二代小波基成为摆在数学家、工程研究人员面前的难题。为解决这些问题,本文提出基于提升格式的解耦小波构造方法,根据问题来构造解耦小波基,以求达到高效求解问题的目的。

## 1 第二代小波

通过提升方案构造的小波即为第二代小波,第二代小波多分辨分析如下。

$L^2(R)$ 空间上的多分辨分析是一族闭子空间序列  $R = \{V_j \subset L^2(R) \mid j \in Z\}$ , 满足下述条件 1) — 条件 3)<sup>[11]</sup>:

$$1) V_j \subset V_{j+1};$$

2) 所有  $V_j$  的并集在  $L^2(R)$  中是稠密的, 即

$$\text{clos} \left\{ \bigcup_{j \in Z} V_j \right\} = L^2(R), \quad \bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\};$$

3) 对于每一个  $j \in Z, V_j$  具有一个由尺度函数  $\{\phi_{j,k} \mid k \in K(j)\}$  给定的 Riesz 基,  $K(j)$  为  $j$  尺度  $k$  取值的集合。设  $W_j$  是  $V_j$  在  $V_{j+1}$  中的互补空间,  $W_j$  由小波函数  $\psi_{j,m}(x)$  张成, 对于每个点  $m \in M(j)$ , 有  $M(j) = K(j+1) \setminus K(j)$ , 即  $M(j)$  是差集。

对于每一个尺度函数  $\phi_{j,k}(j \in J, k \in K(j))$  和对偶尺度函数  $\tilde{\phi}_{j,k}(j \in J, k \in K(j))$ , 存在一组系数, 使得式(1)、式(2)成立:

$$\phi_{j,k} = \sum_{l \in K(j+1)} h_{j,k,l} \phi_{j+1,l}; \quad (1)$$

$$\psi_{j,m} = \sum_{l \in K(j+1)} g_{j,m,l} \phi_{j+1,l}. \quad (2)$$

式中  $h_{j,k,l}$  和  $g_{j,m,l}$  分别为低通滤波器系数和高通滤波器系数。根据文献[21]定理: 如果  $L^2(R)$  有限元空间中的插值函数集  $\{\phi_{j,k}\}_{k \in K(j)}$  是稠密完备的, 那么有限元空间  $V$  可构成一个多分辨空间  $V_j$ 。令有限元插值函数为小波的尺度函数, 那么对应的小波函数就是尺度函数的补空间中的细节插值函数。有限元多分辨空间中的尺度函数满足式(3)的细化关系:

$$\phi_{j,k} = \phi_{j+1,k} + \sum_{m \in M(j)} g_{j,k,m} \phi_{j+1,m}. \quad (3)$$

其中  $g_{j,k,m}$  为小波的细化系数, 是通过联立相邻两尺度上的尺度函数和小波函数节点方程组来求解的。第二代小波多分辨空间中小波函数和尺度函数满足关系  $\psi_{j,m} = \phi_{j+1,m}$ 。图 1 表示的是单元端点尺度函数和小波函数及其两尺度关系。

二次 Lagrange 多分辨有限元空间的二尺度关系式为

$$\mathbf{g}_{j,k,m} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

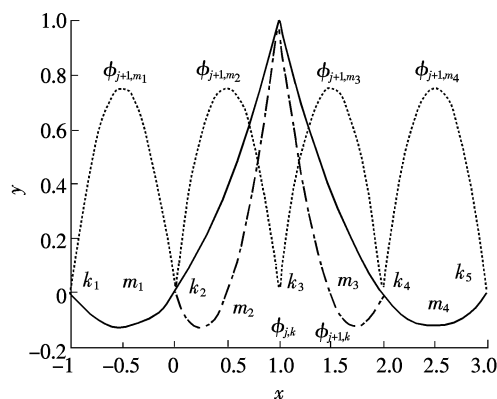


图 1 二次插值函数的两尺度关系

Fig. 1 Two-scale relation for the quadratic interpolation function

## 2 对流扩散方程的多尺度算法

### 2.1 多尺度计算框架

对流 - 扩散方程的双线性弱解形式为

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \quad (5)$$

利用小波数值求解方法对解空间  $V$  构造任意平方可积实数空间  $L^2(R)$  上的多分辨率分析  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ , 对式(5)中的试探函数  $u$  和容许函数  $v$  分别选取为小波函数和尺度函数, 那么可表示为式(6)形式:

$$a(\phi_{j+1}, \psi_{j+1}) = f(\phi_{j+1}), \quad \forall \psi_j \in V_j; \quad (6)$$

若采用多分辨率分析来逼近真解  $u(x)$ , 则  $j+1$  尺度的小波解可以由  $j$  尺度的尺度函数和小波函数表示如下:

$$u_{j+1} = \sum u_{j,k}^T \phi_{j,k} + \sum r_{j,m}^T \psi_{j,m}; \quad (7)$$

对应于式(7)的  $j$  尺度的小波离散方程组为

$$\mathbf{K}_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{f}_{j+1}, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{K}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_j & \mathbf{K}_{c,j} \\ \mathbf{K}_{d,j} & \mathbf{K}_{e,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\phi_j, \phi_j^T) & a(\phi_j, \psi_j^T) \\ a(\psi_j, \phi_j^T) & a(\psi_j, \psi_j^T) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{f}_{j+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j \\ \mathbf{p}_j \end{bmatrix}. \quad (10)$$

式中:  $\mathbf{K}_j$  为  $j$  尺度的小波刚度矩阵;  $\mathbf{K}_{c,j}$  为  $j$  尺度和  $j+1$  尺度的耦合矩阵,  $\mathbf{K}_{d,j} = \mathbf{K}_{c,j}$ ,  $\mathbf{K}_{e,j}$  为  $j+1$  尺度的细节矩阵;  $\mathbf{f}_j$  为  $j$  尺度的载荷向量;  $\mathbf{p}_j$  为小波空间的载荷向量。工程多尺度计算中一般存在耦合, 即  $\mathbf{K}_{c,j} \neq 0$ 。为解决此问题, 利用提升方案改变小波的性质, 使得  $j$  尺度和  $j+1$  尺度耦合关系  $\mathbf{K}_{c,j} = a(\phi_j, \psi_j^T) = 0$ , 则

$$\mathbf{K}_j \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j, \quad (11)$$

$$\mathbf{K}_{e,j} \mathbf{r}_j = \mathbf{p}_j, \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_{e,j+1} \mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{p}_{j+1}, \dots, \quad (13)$$

具有解耦特性的提升小波可为解耦小波, 其优点在于系统刚度矩阵具有沿对角线的强稀疏性, 实现工程问题在每个尺度上的独立、快速求解, 使得系统方程的求解效率得到迅速提高。

### 2.2 解耦条件

为保证多尺度刚度矩阵的解耦性, 必须根据小波的消失矩来保证尺度函数和小波函数之间的尺度正交性。为了构造满足消失矩阶次的解耦小波, 本文提出了基于提升方案的解耦小波构造方法。在任一多分辨率空间, 一个紧支的提升小波  $\psi_{j,m}$  是通过将相邻的尺度函数  $\phi_{j,k}$  添加到原始小波  $\psi_{j,m}^{\text{old}}$  来实现的, 通常原始小波是由尺度函数  $\phi_{j+1,m}$  选定的, 具有式(14)形式:

$$\psi_{j,m} = \psi_{j,m}^{\text{old}} - \sum_k s_{j,k,m} \phi_{j,k} = \phi_{j+1,m} - \sum_k s_{j,k,m} \phi_{j,k}, \quad (14)$$

式中  $s_{j,k,m}$  为提升系数。提升方案提供了一种简单、灵活的工具, 通过选择合适的提升系数  $s_{j,k,m}$  来获得用户定义的消失矩特性, 可设计各种满足问题需要的解耦小波。解耦小波通过式(15)求解提升系数  $s_{j,k,m}$ :

$$[a(x^{n-1}, \phi_{j,k}) \quad a(x^{n-1}, \phi_{j+1,m})] \cdot \begin{bmatrix} s_{j,k,m} \\ 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (15)$$

为保证多尺度刚度矩阵的解耦特性, 必须根据小波的消失矩来保证尺度函数和小波函数之间的算子正交性。在多分辨率有限元空间中, 如果小波在积分边界上为零, 那么小波的导数将会有一阶消失矩。一个  $n$  阶小波必须提升到  $n$  阶消失矩来保证算子正交性。具体推导形式如下:

$$\int_{\Omega} \frac{d\psi}{dx} dx = \psi \Big|_{x_1}^{x_2} = 0; \quad (16)$$

$$\int_{\Omega} x^n \frac{d\psi}{dx} dx = x^n \psi \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{\Omega} n x^{n-1} \psi dx = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} x^{n-1} \psi dx = 0. \quad (17)$$

### 2.3 多尺度解耦小波算法

多尺度解耦小波算法是通过提升尺度, 即在全域添加解耦小波, 逐步逼近问题精确解。具体步骤如下:

1) 给定误差阈值  $\gamma$ , 生成初始尺度空间  $V_j$  的有限元网格, 并求解初始尺度的方程  $\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0$ , 计算初始

尺度的相对误差  $\eta_j$ ;

- 2) 比较相对误差  $\eta_j (j = 0)$  和误差阈值  $\gamma$ , 如果  $\eta_j \leq \gamma$ , 停止计算, 输出结果;
- 3) 提高逼近空间的尺度,  $j = j + 1$ , 并利用提升方法构造  $j$  尺度的解耦小波;
- 4) 添加小波空间  $W_{j+1}$  的解耦小波到原始尺度的多尺度刚度阵, 回到步骤 2)。

该方法采用两尺度相对误差估计, 定义为相邻的  $j+1$  和  $j$  尺度单元计算结果  $\bar{u}_{j+1}$  和  $\bar{u}_j$  之差的一致范数与  $\bar{u}_{j+1}$  的绝对极大值的比值, 即

$$\eta_j = \max |\bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j| / \max |\bar{u}_{j+1}|. \quad (18)$$

### 3 算 例

设对流扩散方程为  $-\epsilon u'' + bu' = f$ , 设  $b = 1, \epsilon = 0.01$ , 并给定边界条件

$$u(0) = 0, u(1) = 1, \text{右端项为 } f(x) = -1,$$

其解析解为

$$u(x) = \frac{\exp((b/\epsilon) \times x) - 1}{\exp(b/\epsilon) - 1} - x.$$

该问题在靠近边界 1 处存在奇异, 通过式(8)可推导该问题的耦合矩阵为

$$\mathbf{K}_{c,j} = \int_{\Omega} \left( \epsilon \frac{d\psi_{j,m}}{dx} \frac{d\phi_{j,k}}{dx} + b \frac{d\psi_{j,m}}{dx} \phi_{j,k} \right) dx. \quad (19)$$

分别采用二次和三次 Lagrange 解耦小波求解此对流扩散方程, 构造解耦小波如图 2 所示。给定阈值  $\gamma=0.02\%$ , 采用二次及三次 Lagrange 解耦小波多尺度算法求解该对流扩散方程问题。图 3 表示的是对应于三次 Lagrange 解耦小波的多尺度刚度矩阵 ( $nz$  表示非零元素的个数), 该刚度阵是沿对角高度稀疏的完全解耦矩阵, 适合高效的多尺度计算。为了分析该对流扩散方程多尺度求解的相对误差, 给出了解耦小波解的细节图及相对误差图。图 4 和图 5 表示的是多尺度解耦小波解的相对误差与尺度和自由度之间的关系曲线图。表 1 列出的是二次和三次解耦小波解。表 2 列出的是二次和三次解耦小波算法的求解时间比较。由图可知, 该问题的三次解耦小波解比二次解耦小波解具有更快的收敛速度。因此, 对流扩散方程的解耦小波解法具有较高的求解精度。从表 2 分析可得出, 多尺度解耦小波算法的计算时间较传统自适应有限元法少, 其原因是利用解耦小波所构造的多尺度刚度矩阵为沿对角的稀疏矩阵, 提高了刚度矩阵的稀疏性, 避免了重新划分网格或提高插值函数的阶次所带来的大量有限元前处理工作和时间, 从而提高了对流扩散问题的求解效率。

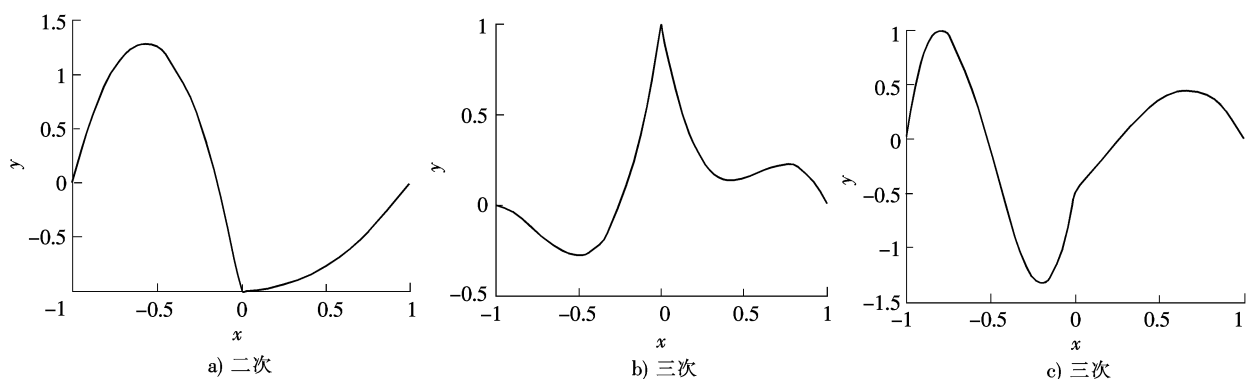


图 2 解耦小波

Fig. 2 Decoupling wavelets

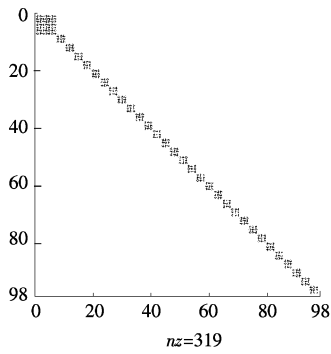


图 3 刚度矩阵稀疏度  
Fig. 3 Sparsity of stiffness matrix

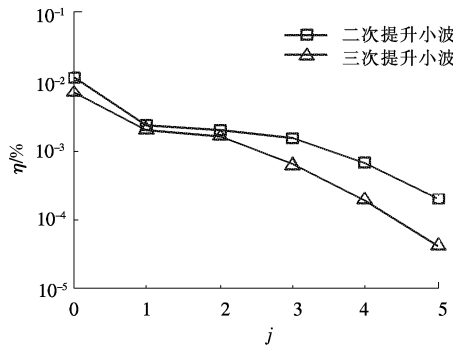


图 4 解耦小波解的误差-尺度  
Fig. 4 Estimation of decoupled wavelet solution at each scale

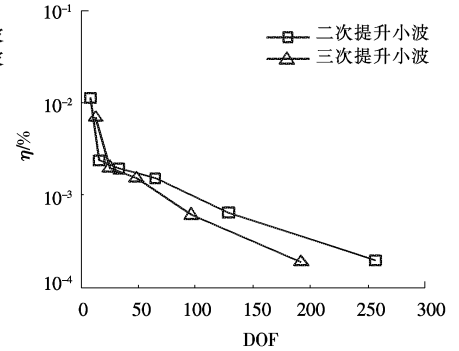


图 5 解耦小波解的误差-自由度  
Fig. 5 Estimation of decoupled wavelet solution with degrees of freedom

表 1 对流扩散方程的多尺度解耦小波解

Tab. 1 Multiscale decoupled wavelet solution of convection-diffusion equation

尺度	二次			三次		
	$\delta_j$	$\eta_j / \%$	DOFs	$\delta_j$	$\eta_j / \%$	DOFs
V0(j=0)	—	—	5	—	—	7
W0(j=0)	1.675 9	1.121 6	4	0.838 9	0.692 9	6
W1(j=1)	0.286 1	0.236 4	8	0.218 1	0.199 5	12
W2(j=2)	0.207 8	0.197 2	16	0.149 7	0.155 5	24
W3(j=3)	0.144 4	0.153 6	32	0.058 1	0.061 6	48
W4(j=4)	0.061 6	0.065 5	64	0.017 6	0.018 9	96
W5(j=5)	0.018 3	0.019 5	128	0.003 9	0.004 2	192

表 2 各种自适应方法的运行时间

Tab. 2 Running time of different adaptive methods

方法	$\eta / \%$	计算时间/s
二次解耦小波	0.02	9.28
三次解耦小波	0.02	6.32
三次传统有限元	0.02	15.71

## 4 结 语

提升方案的优点在于根据对流扩散问题的需要灵活设计各种具有紧支撑、高消失矩的解耦小波。本文提出的方法可根据对流扩散方程求解的需要构造不同阶次的解耦小波。解耦小波的解耦特性使得系统刚度矩阵具有沿对角线的强稀疏性,实现解耦小波在每个尺度上独立求解,使得系统方程的求解效率得到迅速提高。与传统有限元相比,多尺度解耦小波算法避免了重新划分网格或提高插值函数的阶次所带来的大量有限元前处理工作和时间,提高了对流扩散问题的分析效率。计算结果表明,通过提高解耦小波的阶次或尺度,可实现对流扩散方程的高效求解。

## 参考文献/References:

- [1] 张引娣,封建湖,余剑生. 二维非线性对流扩散方程特征有限元方法[J]. 长安大学学报,2010,30(3): 105-110.  
ZHANG Yindi, FENG Jianhu, YU Jiansheng. Characteristic finite element method for 2-D nonlinear convection-diffusion problems[J]. Journal of Chang'an University, 2010, 30(3): 105-110.
- [2] 蒋建国,吴吉春. 格子行走方法求解一维对流扩散方程[J]. 南京大学学报, 2011, 47(3): 276-280.

- JIANG Jianguo, WU Jichun. Lattice-walk method for the convection-diffusion equation[J]. *Journal of Nanjing University*, 2011, 47(3): 276-280.
- [3] 纪冬梅, 轩福贞, 涂善东. 矩形板屈曲问题的小波解[J]. *应用力学学报*, 2011, 28(1): 95-99.  
JI Dongmei, XUAN Fuzhen, TU Shandong. A wavelet solution of high order buckling problem for clamped rectangular plates[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2011, 28(1): 95-99.
- [4] 王保国, 吴俊宏, 朱俊强. 基于小波奇异分析的流场计算方法及应用[J]. *航空动力学报*, 2010, 25(12): 2 747-2 748.  
WANG Baoguo, WU Junhong, ZHU Junqiang. Method based on wavelet singularity analysis for complicated flow and its application[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2010, 25(12): 2 747-2 748.
- [5] 张悦, 杜守军, 张丽梅. 小波奇异性在钢结构损伤检测中的应用[J]. *河北科技大学学报*, 2010, 31(2): 151-157.  
ZHANG Yue, DU Shoujun, ZHANG Limei. Application of wavelet singularity to steel structural damage detection[J]. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, 2010, 31(2): 151-157.
- [6] 陈军霞, 孙幸成. 基于小波变换的神经网络容错控制研究[J]. *河北科技大学学报*, 2011, 32(6): 567-570.  
CHEN Junxia, SUN Xingcheng. Study on fault-tolerant controller based on wavelet transform compensatory network[J]. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, 2011, 32(6): 567-570.
- [7] HASHISH H, BEHIRY S H, ELSAID A. Solving the 2-D heat equations using wavelet-Galerkin method with variable time step [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 213(1): 209-215.
- [8] DOU Fangfang, FU Chuli, MA Yunjie. A wavelet-Galerkin method for high order numerical differentiation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 215(10): 3 702-3 712.
- [9] BERTOLUZZA S, NALDI G. A wavelet collocation method for the numerical solution of partial differential equations[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1996, 3(1): 1-9.
- [10] KANEKO H, NOREN R D, NOVAPRATEEP R. Wavelet applications to the Petrov-Galerkin method for Hammerstein equations [J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, 45(2/3): 255-273.
- [11] DAHMEN W, KUNOTH A, SCHNEIDER R. Wavelet least squares methods for boundary value problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2002, 39(6): 1 985-2 013.
- [12] DONG Hongbo, CHEN Xuefeng, LI Bing, et al. Rotor crack detection based on high-precision modal parameter identification method and wavelet finite element model [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23(3): 869-883.
- [13] CHEN Xuefeng, XIANG Jiawei, LI Bing, et al. A study of multiscale wavelet-based elements for adaptive finite element analysis[J]. *Advances in Engineering Software*, 2010, 41(2): 196-205.
- [14] 何正嘉, 陈雪峰, 李兵, 等. 小波有限元理论及其工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.  
HE Zhengjia, CHEN Xuefeng, LI Bing, et al. *Wavelet Finite Element Theory and Its Engineering Applications* [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [15] SWELDENS W. The lifting scheme: A construction of second generation wavelets[J]. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 1997, 29(2): 511-546.
- [16] SWELDENS W. The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1996, 3(2): 186-200.
- [17] PINHO P, FERREIRA P, PEREIRA J R. Multiresolution analysis using biorthogonal and interpolating wavelets [J]. *IEEE Antennas and Propagation Society Symposium*, 2004, 2: 1 483-1 486.
- [18] WANG Yibo, YANG Huizhu. Second generation wavelet based on adaptive solution of wave equation[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2006, 7(4): 435-438.
- [19] HE Yumin, CHEN Xuefeng, XIANG Jiawei, et al. Adaptive multiresolution finite element method based on second generation wavelets [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, 43: 566-579.
- [20] MEHRA M, KEVLAHAN N. An adaptive multilevel wavelet solver for elliptic equations on an optimal spherical geodesic grid [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 30(6): 3 073-3 086.
- [21] BATHE K J. *Finite Element Procedures* [M]. Prentice-Hall: Upper Saddle River, 1996.